MODIFIKASI METODE EKSPANSI-*F* UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BOUSSINESQ ORDE EMPAT

VINA APRILIANI

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2015

PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi berjudul Modifikasi Metode Ekspansi-*F* untuk Menyelesaikan Persamaan Boussinesq Orde Empat adalah benar karya saya dengan arahan dari komisi pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Mei 2015

Vina Apriliani
NIM G54110005

ABSTRAK

VINA APRILIANI. Modifikasi Metode Ekspansi-*F* untuk Menyelesaikan Persamaan Boussinesq Orde Empat. Dibimbing oleh JAHARUDDIN dan ELIS KHATIZAH.

Gelombang permukaan merupakan salah satu fenomena yang ditemui ketika mengamati permukaan air laut. Perambatan gelombang panjang di perairan dangkal yang bergerak dalam dua arah dijelaskan secara matematis dalam bentuk persamaan Boussinesq orde empat. Metode ekspansi-*F* dimodifikasi untuk menyelesaikan persaman Boussinesq orde empat. Dalam metode ini, persamaan Boussinesq orde empat ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa taklinear dan penyelesaiannya dimisalkan dalam bentuk gelombang berjalan. Hasil yang diperoleh dengan modifikasi metode ekspansi-*F* merupakan penyelesaian eksak yang dinyatakan dalam fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri dan penyelesaiannya dideskripsikan dalam bentuk grafik.

Kata kunci: gelombang air dangkal, persamaan Boussinesq orde empat, modifikasi metode ekspansi-*F*

ABSTRACT

VINA APRILIANI. Extended F-Expansion Methods for Solving the Fourth Order Boussinesq Equations. Supervised by JAHARUDDIN and ELIS KHATIZAH.

Surface waves are phenomenon encountered at the sea surface. The bi-directional propagation of long waves in shallow water could be described mathematically in the form of the fourth order of the Boussinesq equations. F-expansion methods are modified to solve the fourth order of the Boussinesq equations. In this method, the fourth order of the Boussinesq equations is transformed into a nonlinear ordinary differential equation and its solution is assumed in the form of travelling waves. The results obtained using extended F-expansion methods are exact solutions expressed by Jacobi elliptic function, hyperbolic function, and trigonometric function and they are described graphically.

Keywords: shallow water waves, the fourth order Boussinesq equations, extended F-expansion method

MODIFIKASI METODE EKSPANSI-*F* UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN BOUSSINESQ ORDE EMPAT

VINA APRILIANI

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Departemen Matematika

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2015**

Judul Skripsi : Modifikasi Metode Ekspansi-*F* untuk Menyelesaikan Persamaan Boussinesq Orde Empat
Nama : Vina Apriliani
NIM : G54110005

Disetujui oleh

Dr Jaharuddin, MS
Pembimbing I

Elis Khatizah, SSi, MSi
Pembimbing II

Diketahui oleh

Dr Toni Bakhtiar, MSc
Ketua Departemen

Tanggal Lulus: 13 MAY 2015

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Penulisan karya ilmiah ini juga tidak lepas dari bantuan beberapa pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1 Ayah Jimmy dan Ibu Satinah atas semua doa, semangat, pengorbanan, nasihat, pendidikan, perhatian, cinta dan kasih sayangnya, serta kakak Yulianasari dan adik William Wijaya atas semua doa dan semangatnya.
2 Dr. Jaharuddin, MS. dan Elis Khatizah, S.Si., M.Si. masing-masing sebagai dosen pembimbing I dan dosen pembimbing II atas semua ilmu, kesabaran, motivasi, waktu, nasihat, dan bantuannya selama penulisan skripsi ini.
3 Drs. Ali Kusnanto, M.Si. sebagai dosen penguji atas saran dan kritik untuk perbaikan skripsi ini.
4 Dosen dan staf penunjang Departemen Matematika FMIPA IPB atas semua ilmu, nasihat, dan bantuannya.
5 Ikhsan Maulidi atas doa, semangat, motivasi, nasihat, perhatian, cinta dan kasih sayangnya kepada penulis.
6 Teman-teman satu bimbingan yaitu Resty dan Parara atas semua saran dan bantuannya, serta selalu mengingatkan penulis selama penulisan skripsi ini.
7 Fitriani Ida dan Rani atas doa, semangat, bantuan, dan sebagai sahabat yang selalu menemani penulis dari awal kuliah di IPB.
8 Sahabat-sahabat petualang Sin-Sum yaitu Henny, Parara, Ari, dan Arli atas doa, semangat, bantuan, dan keceriaannya selama ini.
9 Teman-teman Matematika 48 atas segala dukungan, doa, semangat, suka-duka, kebersamaan, dan kebahagiaan selama penulis menempuh studi di Departemen Matematika.
10 Seluruh mahasiswa S2 Matematika Terapan 50 dan 51, Matematika 47, serta Matematika 49 dan 50 atas doa, semangat, dan motivasinya selama penulisan skripsi ini.
11 Pihak-pihak lain yang telah membantu penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam karya ilmiah ini masih terdapat banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca. Semoga karya ilmiah ini dapat bermanfaat dan menjadi inspirasi bagi penelitian-penelitian selanjutnya.

Bogor, Mei 2015

Vina Apriliani

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Gelombang permukaan merupakan salah satu fenomena yang sering ditemui berupa pergerakan naik dan turunnya air dengan arah tegak lurus permukaan air laut. Gelombang tersebut terjadi karena perbedaan rapat massa air dan udara. Salah satu gelombang permukaan yang menjadi perhatian peneliti adalah gelombang soliter. Gelombang soliter merupakan gelombang yang hanya memiliki satu puncak dan bergerak tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan. Partikel-partikel air pada gelombang soliter bergerak hanya dalam arah penjalaran gelombang sehingga tidak ada aliran balik.

Penelitian tentang perambatan gelombang soliter untuk fluida ideal, yaitu fluida yang takmampat (*incompressible*) dan takkental (*inviscid*) merupakan hal penting saat ini. Salah satu persamaan gelombang yang terkait dengan gelombang soliter adalah persamaan Boussinesq orde empat. Persamaan Boussinesq orde empat mengilustrasikan perambatan gelombang panjang di perairan dangkal yang bergerak dalam dua arah. Persamaan ini juga muncul dalam aplikasi fisika lainnya. Sebagai contoh, gelombang suara dalam suatu media dan getaran dalam suatu pegas taklinear (Naher dan Abdullah 2012).

Banyak peneliti yang sudah mempelajari persamaan Boussinesq orde empat untuk mengonstruksi penyelesaian analitik menggunakan metode-metode yang berbeda. Beberapa di antaranya adalah metode ekspansi-*F* (Zhang 2005) dengan pemisalan penyelesaiannya dinyatakan dalam fungsi *F* yang memenuhi persamaan diferensial biasa taklinear orde pertama, metode *basic* (G'/G)-*expansion* (Naher dan Abdullah 2012) dengan pemisalan penyelesaiannya dinyatakan dalam fungsi G'/G yang memenuhi persamaan diferensial biasa linear orde kedua, dan metode $\exp\big(-\phi(\eta)\big)$-*expansion* (Akbar dan Ali 2014) dengan pemisalan penyelesaiannya dinyatakan dalam fungsi eksponensial.

Metode ekspansi-*F* merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaian eksak dari masalah persamaan diferensial taklinear dengan bentuk penyelesaian yang lebih sederhana. Yomba (2005) telah mengusulkan modifikasi metode ekspansi-*F* dengan memberikan tambahan variabel pada pemisalan penyelesaiannya. Metode ini telah digunakan oleh Al-Fhaid (2012) untuk menyelesaikan persamaan modifikasi KdV-KP, oleh Zhao (2013) untuk menyelesaikan persamaan Kudryashov-Sinelshchikov dan oleh He *et al.* (2013) untuk menyelesaikan persamaan gelombang orde tinggi bertipe KdV. Pada karya ilmiah ini akan dibahas penyelesaian eksak persamaan Boussinesq orde empat dengan menggunakan modifikasi metode ekspansi-*F*.

Tujuan Karya Ilmiah

Penelitian dalam karya ilmiah ini bertujuan untuk:

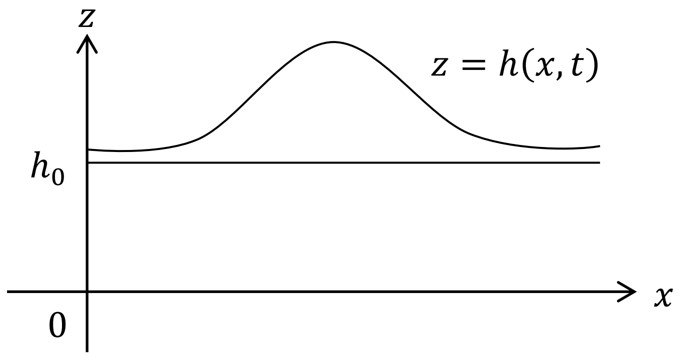
1. Menentukan penyelesaian eksak dari persamaan Boussinesq orde empat dengan menggunakan modifikasi metode ekspansi-*F*.
2. Menggambarkan grafik penyelesaian persamaan Boussinesq orde empat, kemudian memberikan tafsiran terhadap grafik tersebut.

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas teori-teori yang digunakan dalam menyusun karya ilmiah ini. Teori-teori tersebut meliputi penurunan persamaan Boussinesq orde empat (Daripa 2006), konsep dasar metode ekspansi-*F* (Bashir dan Alhakim 2013) beserta modifikasinya (He *et al.* 2013), dan fungsi Jacobi eliptik (Jacobi 1829).

Persamaan Boussinesq

Pada bagian ini akan diuraikan secara singkat penurunan persamaan Boussinesq orde empat berdasarkan metode perturbasi dengan dua parameter. Bukti penurunan didasarkan pada Daripa (2006).



Gambar 1 Grafik simpangan gelombang permukaan air bebas

Misalkan $z = 0$ merepresentasikan topografi bawah dan $z = h(x,t) = h_0 + a\eta(x,t)$ merepresentasikan permukaan air bebas dengan h_0 adalah ketinggian permukaan air tenang, a adalah amplitudo dari gelombang permukaan, dan $\eta(x,t)$ adalah ketinggian permukaan bebas dari posisi tenang. Misalkan (u,w) merepresentasikan medan kecepatan dalam koordinat (x,z) dan digunakan penondimensionalan berikut:

$$X = lx, \qquad Z = h_0 z, \qquad T = \frac{l}{\sqrt{gh_0}}t,$$
$$U = \frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u, \quad W = \frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w, \quad P = a\rho g p, \tag{1}$$

dengan l adalah panjang gelombang dari gelombang permukaan, g adalah percepatan gravitasi, ρ adalah massa jenis fluida, dan p adalah tekanan.

Persamaan Euler untuk fluida ideal diberikan sebagai berikut:

$$\begin{gathered} U_T + UU_X + WU_Z = -\frac{1}{\rho}P_X, \\ W_T + UW_X + WW_Z = -\frac{1}{\rho}P_Z, \\ U_X + W_Z = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Jika dilakukan penondimensionalan dengan menggunakan Persamaan (1), maka persamaan Euler (2) menjadi

$$\begin{gathered} u_t + \alpha(uu_x + wu_z) = -p_x, \\ \beta[w_t + \alpha(uw_x + ww_z)] = -p_z, \\ u_x + w_z = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

dengan $\alpha = a/h_0$ adalah parameter amplitudo kecil dan $\beta = (h_0/l)^2$ adalah parameter panjang gelombang panjang. Penurunan Persamaan (3) diberikan pada Lampiran 1.

Kondisi batas kinematik dan dinamik diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{pada } z = 0,\\ w &= \eta_t + \alpha u \eta_x && \text{pada } z = 1 + \alpha\eta,\\ p &= \eta - \beta\tau \frac{\eta_{xx}}{(1+\alpha^2\beta{\eta_x}^2)^{3/2}} && \text{pada } z = 1 + \alpha\eta, \end{aligned} \tag{4}$$

dengan $\tau = \Gamma/\rho g {h_0}^2$ dan Γ adalah koefisien tegangan permukaan. Berdasarkan Whitham (1974), kondisi batas (4) dituliskan kembali pada saat $z = 0$ dan $z = 1$ melalui ekspansi deret Taylor untuk $u,\ w$, dan p sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{pada } z = 0,\\ w + \alpha\eta w_z + \frac{\alpha^2\eta^2}{2} w_{zz} &= \eta_t + \alpha\eta_x(u + \alpha\eta u_z) + O(\alpha^3) && \text{pada } z = 1,\\ p + \alpha\eta p_z + \frac{\alpha^2\eta^2}{2} p_{zz} &= \eta - \beta\tau\eta_{xx} + O(\alpha^3, \alpha^2\beta^2) && \text{pada } z = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Daripa (2006) menurunkan persamaan umum orde lebih tinggi tipe Boussinesq untuk η dengan menggunakan Persamaan (3) dan kondisi batas (5) melalui metode perturbasi dua parameter sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} &\eta_{tt} - \eta_{xx} - \alpha\left[\frac{1}{2}\eta^2 + \left(\int_{-\infty}^{x}\eta_t dx\right)^2\right]_{xx} - \beta\left[\frac{1}{3} - \tau\right]\eta_{xxxx} + \alpha^2\left[\eta\left(\int_{-\infty}^{x}\eta_t dx\right)^2\right]_{xx}\\ &\quad -\alpha\beta\left[\frac{2}{3}(\eta_t^2)_{xx} + (\eta\eta_{xx})_{xx} - \tau(\eta\eta_{xxx})_x\right] - \frac{\beta^2}{3}\left[\frac{2}{5} - \tau\right]\eta_{xxxxxx} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Persamaan (6) adalah persamaan umum tipe Boussinesq yang valid untuk nilai-nilai α dan β yang kecil. Persamaan ini mencakup efek tegangan permukaan melalui τ dan menggambarkan perambatan dua arah dari gelombang panjang dengan amplitudo kecil pada permukaan air dangkal.

Persamaan Boussinesq orde empat dapat diturunkan dari Persamaan (6) dengan efek taklinear muncul saat $O(\alpha)$, $O(\alpha^2)$ dan $O(\alpha\beta)$, sedangkan efek dispersi muncul saat $O(\beta)$ dan $O(\beta^2)$. Persamaan Boussinesq orde empat dapat diperoleh untuk kasus ketika $\left|\frac{1}{3} - \tau\right| \gg \beta$ dengan dispersi orde empat hilang untuk $\tau = \frac{1}{3}$. Jika $\left|\frac{1}{3} - \tau\right| \gg \beta$ atau $\left(\frac{1}{3} - \tau\right) = \pm K_1$ dan $K_1 \gg \beta$, maka keseimbangan antara ketaklinearan dan dispersi yang diperlukan untuk model gelombang membutuhkan $\alpha = O(\beta)$ jika $\beta \to 0$. Sebagai contoh $(\alpha/\beta) \to K_2 > 0$ jika $\beta \to 0$. Berdasarkan Persamaan (6), didapat persamaan Boussinesq orde empat sebagai berikut:

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - \alpha\left[\frac{1}{2}\eta^2 + \left(\int_{-\infty}^{x}\eta_t dx\right)^2\right]_{xx} \pm \frac{K_1}{K_2}\alpha\eta_{xxxx} = 0. \tag{7}$$

Selanjutnya, misalkan transformasi koordinat berdasarkan Johnson (1997), yaitu

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\left(x + \alpha\int_{-\infty}^{x}\eta(x,t)\,dx\right),\\ T &= \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\,t \end{aligned} \tag{8}$$

dan

$$N = \frac{3}{2}(\eta - \alpha\eta^2). \tag{9}$$

Persamaan Boussinesq orde empat (7) dapat ditransformasi menggunakan (8) dan (9) menjadi bentuk berikut:

$$N_{TT} - N_{XX} - \alpha (N^2)_{XX} \pm \alpha N_{XXXX} = 0. \tag{10}$$

Dalam penelitian ini akan ditinjau persamaan Boussinesq orde empat menurut Naher dan Abdullah (2012) sebagai berikut:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{11}$$

Metode Ekspansi-*F*

Prosedur utama dari metode ekspansi-*F* disajikan oleh Bashir dan Alhakim (2013). Tinjau bentuk umum persamaan diferensial parsial taklinear dengan dua variabel bebas berikut:

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \tag{12}$$

Didefinisikan transformasi $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - ct$, dengan c adalah kecepatan gelombang yang bergerak sepanjang arah sumbu-x dan $c \neq 0$. Berdasarkan transformasi ini, Persamaan (12) dapat dituliskan menjadi persamaan diferensial biasa taklinear berikut:

$$F(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{13}$$

dengan U' menunjukkan turunan pertama terhadap ξ.

Selanjutnya misalkan penyelesaian Persamaan (13) dituliskan dalam bentuk

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i F^i(\xi) \tag{14}$$

dengan A_i $(i = 0,1,2, \dots n)$ adalah konstanta yang akan ditentukan dan n adalah bilangan bulat positif yang didapat dengan membuat keseimbangan antara orde tertinggi turunan dengan orde tertinggi taklinear, sedangkan fungsi $F(\xi)$ memenuhi persamaan berikut:

$$\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_1 F(\xi) + h_2 F^2(\xi) + h_3 F^3(\xi) + h_4 F^4(\xi) \tag{15}$$

untuk h_i $(i = 0,1,2,3,4)$ suatu konstanta. Jika Persamaan (14) disubstitusikan ke dalam Persamaan (13) dengan $F(\xi)$ memenuhi Persamaan (15) dan mengatur semua koefisien $F^j(\xi)$ $(j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ dari sistem yang dihasilkan menjadi nol, maka diperoleh sistem persamaan aljabar taklinear yang mengandung c dan A_i $(i = 0,1,2, \dots, n)$. Sistem persamaan aljabar taklinear yang diperoleh selanjutnya dapat diselesaikan sehingga diperoleh c dan A_i $(i = 0,1,2, \dots, n)$ yang dinyatakan dalam h_i $(i = 0,1,2,3,4)$.

Metode ekspansi-*F* yang telah diuraikan diatas dapat dikembangkan sebagai modifikasi metode ekspansi-*F* (He *et al.* 2013). Persamaan (14) dimisalkan memiliki penyelesaian dalam bentuk

$$u(x,t) = U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(A_i F^i(\xi) + B_i F^{-i}(\xi)\right). \tag{16}$$

Fungsi Jacobi Eliptik

Dalam matematika, fungsi Jacobi eliptik adalah kumpulan dari fungsi eliptik dasar dan fungsi theta pembantu. Fungsi Jacobi eliptik diperkenalkan oleh Jacobi (1829). Terdapat 12 fungsi Jacobi eliptik, yaitu

$$\mathrm{ns}(u) = \frac{1}{\mathrm{sn}(u)}, \quad \mathrm{nc}(u) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u)}, \quad \mathrm{nd}(u) = \frac{1}{\mathrm{dn}(u)},$$

$$\mathrm{sc}(u)=\frac{\mathrm{sn}(u)}{\mathrm{cn}(u)},\quad \mathrm{dc}(u)=\frac{\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{cn}(u)},\quad \mathrm{ds}(u)=\frac{\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)},$$
$$\mathrm{cs}(u)=\frac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{sn}(u)},\quad \mathrm{cd}(u)=\frac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{dn}(u)},\quad \mathrm{sd}(u)=\frac{\mathrm{sn}(u)}{\mathrm{dn}(u)}.$$

Fungsi Jacobi eliptik dapat didefinisikan sebagai invers dari integral eliptik. Misalkan

$$u=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}},$$

fungsi eliptik $\mathrm{sn}(u), \mathrm{cn}(u)$, dan $\mathrm{dn}(u)$ diberikan sebagai

$$\mathrm{sn}(u)=\sin\phi$$
$$\mathrm{cn}(u)=\cos\phi$$
$$\mathrm{dn}(u)=\sqrt{1-m\sin^2\phi}$$

dengan sudut ϕ disebut amplitudo.

Fungsi Jacobi eliptik juga dapat didefinisikan sebagai trigonometri. Misalkan

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$
$$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
$$m=\left(1-\frac{1}{b^2}\right)<1,$$

diperoleh

$$r(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}.$$

Misalkan

$$\cos\phi=x,$$
$$u=\int_0^{\phi}r(\theta)\,d\theta,$$

diperoleh

$$\mathrm{cn}(u)=x,\quad \mathrm{sn}(u)=\frac{y}{b}, \text{dan } \mathrm{dn}(u)=\frac{1}{r(\phi)}.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas penggunaan modifikasi metode ekspansi-F untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq orde empat. Persamaan (11) yang berupa persamaan diferensial parsial taklinear diubah dengan menggunakan transformasi $u(x,t)=U(\xi),\ \xi=x-ct$, kemudian diintegralkan terhadap ξ dua kali dan diatur semua konstanta pengintegralan sama dengan nol sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa taklinear

$$(c^2-\alpha^2)U-\beta U^2+U''=0. \tag{17}$$

Penurunan Persamaan (17) diberikan pada Lampiran 2.

Keseimbangan antara U'' dan U^2 pada Persamaan (17) menghasilkan persamaan $n+2=2n$ sehingga diperoleh $n=2$. Selanjutnya, penyelesaian Persamaan (17) memiliki bentuk

$$u(x,t) = U(\xi) = A_0 + A_1F(\xi) + A_2F^2(\xi) + \frac{B_1}{F(\xi)} + \frac{B_2}{F^2(\xi)} \tag{18}$$

dengan A_0, A_1, A_2, B_1, dan B_2 adalah konstanta yang akan ditentukan dan $F(\xi)$ memenuhi Persamaan (15). Selanjutnya, kedua ruas Persamaan (15) diturunkan terhadap ξ satu kali sehingga diperoleh

$$2F'(\xi)F''(\xi) = h_1F'(\xi) + 2h_2F(\xi)F'(\xi) + 3h_3F^2(\xi)F'(\xi) + 4h_4F^3(\xi)F'(\xi)$$

$$F''(\xi) = \tfrac{1}{2}h_1 + h_2F(\xi) + \tfrac{3}{2}h_3F^2(\xi) + 2h_4F^3(\xi). \tag{19}$$

Persamaan (18) disubstitusi ke Persamaan (17) dengan menggunakan Persamaan (15) dan (19). Semua koefisien dari $F^j(\xi)\ (j = -4,-3,\dots,3,4)$ dikumpulkan dan diatur menjadi nol sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar taklinear berikut:

$$\begin{aligned}
&F^{-4} : -\beta {B_2}^2 + 6B_2h_0 = 0\\
&F^{-3} : -2\beta B_1B_2 + 2B_1h_0 + 5B_2h_1 = 0\\
&F^{-2} : -\beta {B_1}^2 - \alpha^2B_2 - 2A_0\beta B_2 + B_2c^2 + \tfrac{3}{2}B_1h_1 + 4B_2h_2 = 0\\
&F^{-1} : -\alpha^2B_1 - 2A_0\beta B_1 - 2A_1\beta B_2 + B_1c^2 + B_1h_2 + 3B_2h_3 = 0\\
&F^{0} \ : -\alpha^2A_0 - {A_0}^2\beta - 2A_1\beta B_1 - 2A_2\beta B_2 + A_0c^2 + 2A_2h_0 + \tfrac{A_1h_1}{2} + \tfrac{B_1h_3}{2} + 2B_2h_4 = 0 \qquad (20)\\
&F \ \ \ : -\alpha^2A_1 - 2A_0A_1\beta - 2A_2\beta B_1 + A_1c^2 + 3A_2h_1 + A_1h_2 = 0\\
&F^{2} \ : -\alpha^2A_2 - {A_1}^2\beta - 2A_0A_2\beta + A_2c^2 + 4A_2h_2 + \tfrac{3}{2}A_1h_3 = 0\\
&F^{3} \ : -2A_1A_2\beta + 5A_2h_3 + 2A_1h_4 = 0\\
&F^{4} \ : -{A_2}^2\beta + 6A_2h_4 = 0.
\end{aligned}$$

Penurunan Persamaan (20) diberikan pada Lampiran 3.

Persamaan (20) diselesaikan dengan menggunakan *software Mathematica* (asumsi saat $h_1 = h_3 = 0$) sehingga diperoleh beberapa hasil sebagai berikut:

Kasus 1

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{6h_4}{\beta} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}} \tag{21}$$

Kasus 2

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{6h_4}{\beta} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}} \tag{22}$$

Kasus 3

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0 \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{6h_0}{\beta}$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}} \tag{23}$$

Kasus 4

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0 \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{6h_0}{\beta}$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}} \tag{24}$$

Kasus 5

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{6h_4}{\beta} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{6h_0}{\beta}$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}} \tag{25}$$

Kasus 6

$$A_0 = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}\right)}{\beta} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{6h_4}{\beta} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{6h_0}{\beta}$$

$$c = \pm\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}}. \tag{26}$$

Persamaan (21) sampai Persamaan (26) berturut-turut disubstitusi ke Persamaan (18) sehingga diperoleh bentuk umum penyelesaian sebagai berikut:

Kasus 1

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_4}{\beta}F^2(\xi) \tag{27}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}}\right)t.$

Kasus 2

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_4}{\beta}F^2(\xi) \tag{28}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}}\right)t.$

Kasus 3

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_0}{\beta F^2(\xi)} \tag{29}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}}\right)t.$

Kasus 4

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_0}{\beta F^2(\xi)} \tag{30}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 - 3h_0h_4}}\right)t.$

Kasus 5

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 + \sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_4}{\beta}F^2(\xi) + \frac{6h_0}{\beta F^2(\xi)} \tag{31}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}}\right)t.$

Kasus 6

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(h_2 - \sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}\right)}{\beta} + \frac{6h_4}{\beta}F^2(\xi) + \frac{6h_0}{\beta F^2(\xi)} \tag{32}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{{h_2}^2 + 12h_0h_4}}\right)t.$

Saat $h_1 = h_3 = 0$, Persamaan (15) berubah menjadi

$$\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_2F^2(\xi) + h_4F^4(\xi). \tag{33}$$

Penyelesaian Persamaan (33) diberikan pada Tabel 1. Banyak penyelesaian eksak dari Persamaan (11) dapat diperoleh dengan mengkombinasikan Persamaan (27) sampai Persamaan (32) dengan Tabel 1. Pada karya ilmiah ini hanya dibahas satu kasus pada Tabel 1 sebagai contoh ilustrasi, sedangkan kasus lainnya dapat diselesaikan dengan cara serupa.

Tabel 1 Penyelesaian untuk $F(\xi)$ pada $\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_2F^2(\xi) + h_4F^4(\xi)$

Nomor	h_0	h_2	h_4	$F(\xi)$
1	1	$-(m^2+1)$	m^2	$\mathrm{sn}(\xi)$, $\mathrm{cd}(\xi)$
2	$1-m^2$	m^2-1	$-m^2$	$\mathrm{cn}(\xi)$
3	m^2-1	$2-m^2$	-1	$\mathrm{dn}(\xi)$
4	m^2	$-(m^2+1)$	1	$\mathrm{ns}(\xi)$, $\mathrm{dc}(\xi)$
5	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$\mathrm{nc}(\xi)$

6	-1	$2-m^2$	m^2-1	$\mathrm{nd}(\xi)$
7	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$\mathrm{sc}(\xi)$
8	1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$\mathrm{sd}(\xi)$
9	$1-m^2$	$2-m^2$	1	$\mathrm{cs}(\xi)$
10	$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$\mathrm{sd}(\xi)$
11	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\mathrm{ns}(\xi) \pm \mathrm{cs}(\xi)$
12	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\mathrm{nc}(\xi) \pm \mathrm{sc}(\xi)$
13	$\frac{m^2}{4}$	$\frac{m^2-2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\mathrm{ns}(\xi) \pm \mathrm{ds}(\xi)$
14	$\frac{m^2}{4}$	$\frac{m^2-2}{2}$	$\frac{m^2}{4}$	$\mathrm{sn}(\xi) \pm i\mathrm{cn}(\xi)$

Tabel 2 Degenerasi fungsi Jacobi eliptik menjadi fungsi hiperbolik saat $m \to 1$

$\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$	$\mathrm{ns}(\xi) \to \coth(\xi)$	$\mathrm{cd}(\xi) \to 1$	$\mathrm{dc}(\xi) \to 1$
$\mathrm{cn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$	$\mathrm{nc}(\xi) \to \cosh(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$	$\mathrm{nd}(\xi) \to \cosh(\xi)$
$\mathrm{sc}(\xi) \to \sinh(\xi)$	$\mathrm{cs}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$	$\mathrm{sd}(\xi) \to \sinh(\xi)$	$\mathrm{ds}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$

Tabel 3 Degenerasi fungsi Jacobi eliptik menjadi fungsi trigonometri saat $m \to 0$

$\mathrm{sn}(\xi) \to \sin(\xi)$	$\mathrm{ns}(\xi) \to \csc(\xi)$	$\mathrm{cd}(\xi) \to \cos(\xi)$	$\mathrm{dc}(\xi) \to \sec(\xi)$
$\mathrm{cn}(\xi) \to \cos(\xi)$	$\mathrm{nc}(\xi) \to \sec(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to 1$	$\mathrm{nd}(\xi) \to 1$
$\mathrm{sc}(\xi) \to \tan(\xi)$	$\mathrm{cs}(\xi) \to \cot(\xi)$	$\mathrm{sd}(\xi) \to \sin(\xi)$	$\mathrm{ds}(\xi) \to \csc(\xi)$

Tabel 1 Kasus 1:

$$h_0 = 1 \quad h_2 = -(m^2+1) \quad h_4 = m^2 \quad F(\xi) = \mathrm{sn}(\xi) \text{ atau } \mathrm{cd}(\xi). \tag{34}$$

Persamaan (34) disubstitusi ke Persamaan (27) sampai Persamaan (32) sehingga diperoleh

Kasus 1

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{sn}(\xi)]^2 \tag{35}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{cd}(\xi)]^2 \tag{36}$$

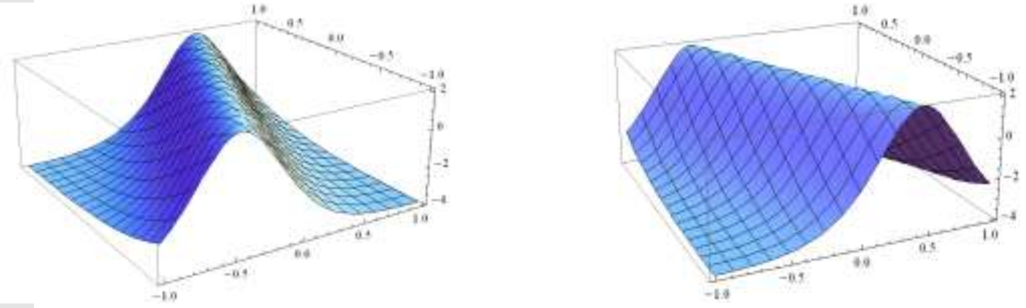
dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{(m^2+1)^2 - 3m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (35) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{2}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\tanh(\xi)]^2 \tag{37}$$

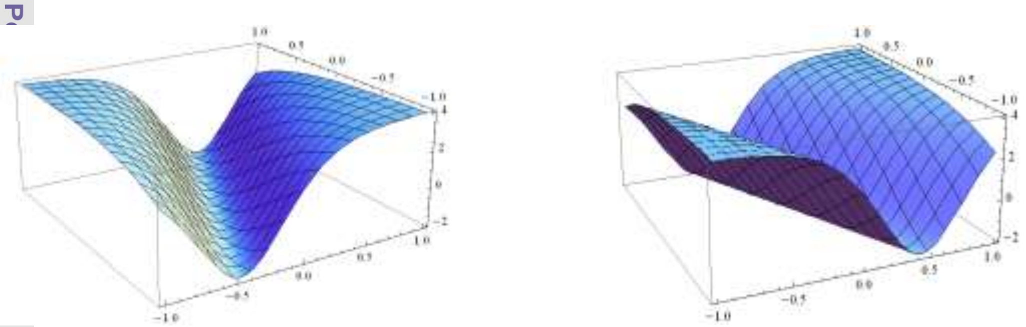
dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2+4}\right)t.$

Untuk Persamaan (36), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Selain itu, ketika $m \to 0$, Persamaan (35) dan (36) juga menjadi fungsi konstan. Fungsi konstan pasti merupakan penyelesaian dari Persamaan (11) sehingga tidak dicantumkan.



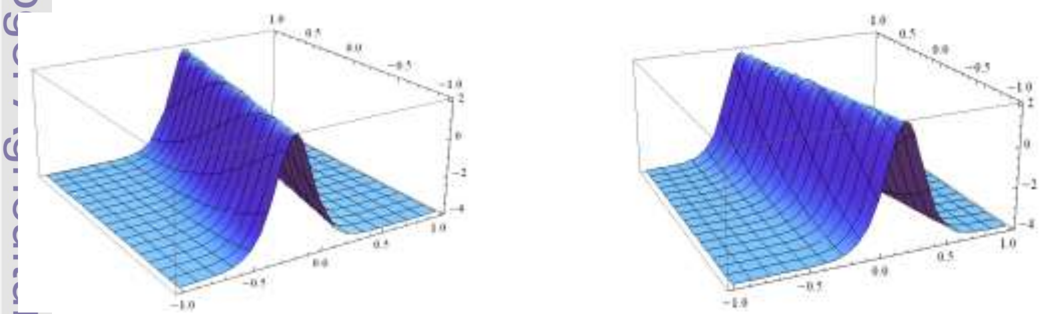
Gambar 2 Grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = -1$ dan $\beta = -1$

Gambar 2 menunjukkan grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = -1$ dan $\beta = -1 < 0$, yaitu $u(x,t) = 2 - 6\left[\tanh\left(x \pm \left(\sqrt{5}\right)t\right)\right]^2$. Berdasarkan Gambar 2 diperoleh bahwa gelombang yang terbentuk hanya memiliki satu puncak dan bergerak tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan. Gambar bagian kiri memiliki kecepatan gelombang $c = \sqrt{5} > 0$ sehingga gerak gelombang mengarah ke kiri (lebih condong ke kiri), sedangkan gambar bagian kanan memiliki kecepatan gelombang $c = -\sqrt{5} < 0$ sehingga gerak gelombang mengarah ke kanan.



Gambar 3 Grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$

Gambar 3 menunjukkan grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = 1 > 0$, yaitu $u(x,t) = -2 + 6\left[\tanh\left(x \pm \left(\sqrt{5}\right)t\right)\right]^2$. Berdasarkan Gambar 3 diperoleh bahwa jika β bernilai positif, maka gelombang yang terbentuk memiliki puncak di bagian bawah.



Gambar 4 Grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = -5$ dan $\beta = -1$

Gambar 4 menunjukkan grafik fungsi u pada Persamaan (37) dengan $\alpha = -5$ dan $\beta = -1 < 0$, yaitu $u(x,t) = 2 - 6\left[\tanh\left(x \pm \left(\sqrt{29}\right)t\right)\right]^2$. Berdasarkan Gambar 4 diperoleh bahwa jika nilai α diperbesar menjauhi nol, maka gelombang yang terbentuk memiliki puncak yang lebih tinggi (amplitudo lebih besar).

Kasus 2

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{sn}(\xi)]^2 \tag{38}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{cd}(\xi)]^2 \tag{39}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{(m^2+1)^2 - 3m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (38) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{6}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\tanh(\xi)]^2 \tag{40}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4}\right)t.$

Untuk Persamaan (39), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Selain itu, ketika $m \to 0$, Persamaan (38) dan (39) juga menjadi fungsi konstan.

Kasus 3

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6}{\beta[\mathrm{sn}(\xi)]^2} \tag{41}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6}{\beta[\mathrm{cd}(\xi)]^2} \tag{42}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{(m^2+1)^2 - 3m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (41) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{2}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\coth(\xi)]^2 \tag{43}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4}\right)t.$

Untuk Persamaan (42), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Ketika $m \to 0$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \sin(\xi)$ dan $\mathrm{cd}(\xi) \to \cos(\xi)$ sehingga Persamaan (41) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{6}{\beta}[\csc(\xi)]^2 \tag{44}$$

dan Persamaan (42) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{6}{\beta}[\sec(\xi)]^2 \tag{45}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4}\right)t.$

Kasus 4

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6}{\beta[\mathrm{sn}(\xi)]^2} \tag{46}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2-3m^2}\right)}{\beta} + \frac{6}{\beta[\mathrm{cd}(\xi)]^2} \tag{47}$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{(m^2+1)^2 - 3m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (46) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{6}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\coth(\xi)]^2 \quad (48)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4}\right)t.$

Untuk Persamaan (47), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Ketika $m \to 0$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \sin(\xi)$ dan $\mathrm{cd}(\xi) \to \cos(\xi)$ sehingga Persamaan (46) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{4}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\csc(\xi)]^2 \quad (49)$$

dan Persamaan (47) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{4}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\sec(\xi)]^2 \quad (50)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4}\right)t.$

Kasus 5

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2+12m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{sn}(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta[\mathrm{sn}(\xi)]^2} \quad (51)$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)+\sqrt{(m^2+1)^2+12m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{cd}(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta[\mathrm{cd}(\xi)]^2} \quad (52)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{(m^2+1)^2 + 12m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (51) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{4}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\tanh(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta}[\coth(\xi)]^2 \quad (53)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 + 16}\right)t.$

Untuk Persamaan (52), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Ketika $m \to 0$, Persamaan (51) akan sama dengan Persamaan (44) dan Persamaan (52) akan sama dengan Persamaan (45).

Kasus 6

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2+12m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{sn}(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta[\mathrm{sn}(\xi)]^2} \quad (54)$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \frac{2\left(-(m^2+1)-\sqrt{(m^2+1)^2+12m^2}\right)}{\beta} + \frac{6m^2}{\beta}[\mathrm{cd}(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta[\mathrm{cd}(\xi)]^2} \quad (55)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{(m^2+1)^2 + 12m^2}}\right)t.$

Ketika $m \to 1$, $\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$ sehingga Persamaan (54) menjadi

$$u(x,t) = U(\xi) = -\frac{12}{\beta} + \frac{6}{\beta}[\tanh(\xi)]^2 + \frac{6}{\beta}[\coth(\xi)]^2 \quad (56)$$

dengan $\xi = x \pm \left(\sqrt{\alpha^2 - 16}\right)t.$

Untuk Persamaan (55), $\mathrm{cd}(\xi) \to 1$ sehingga penyelesaiannya berupa fungsi konstan. Ketika $m \to 0$, Persamaan (54) akan sama dengan Persamaan (49) dan Persamaan (55) akan sama dengan Persamaan (50).

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Modifikasi metode ekspansi-F merupakan suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan penyelesaian eksak dari suatu persamaan diferensial. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq orde empat yang mengilustrasikan perambatan gelombang panjang di perairan dangkal yang bergerak dalam dua arah. Dalam metode ini, persamaan Boussinesq orde empat yang berupa persamaan diferensial parsial taklinear ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa taklinear dan penyelesaiannya dimisalkan dalam bentuk gelombang berjalan.

Dalam penelitian ini, penyelesaian yang diperoleh berupa fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri yang sudah diverifikasi kebenarannya dengan mensubstitusikan penyelesaian tersebut ke persamaan awal. Selain itu, grafik gelombang yang terbentuk memiliki satu puncak dan bergerak tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan sesuai dengan sifat gelombang soliter. Nilai parameter α dan β juga ikut berpengaruh terhadap gelombang yang terbentuk.

Saran

Penyelesaian eksak dari persamaan Boussinesq orde empat dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa asumsi untuk nilai h_i $(i = 0,1,2,3,4)$. Dalam penelitian ini, asumsi yang digunakan adalah saat $h_1 = h_3 = 0$. Perlu adanya kajian lebih lanjut dengan menggunakan asumsi yang lain. Selain itu, untuk penelitian selanjutnya dapat juga menggunakan modifikasi metode ekspansi-F yang lebih umum.

DAFTAR PUSTAKA

Akbar MA, Ali M. 2014. Solitary wave solutions of the fourth order Boussinesq equation through the $\exp\left(-\phi(\eta)\right)$-expansion method. *Springer Plus*. 3(344). doi:10.1186/2193-1801-3-344.

Al-Fhaid AS. 2012. New exact solutions for the modified KdV-KP equation using the extended F-expansion method. *Applied Mathematical Sciences*. 6(107):5315-5332.

Bashir MA, Alhakim LA. 2013. New F-expansion method and its applications to modified KdV equation. *Journal of Mathematics Research*. 5(4):1916-9795. doi:10.5539/jmr.v5n4p83.

Daripa P. 2006. Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves. *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 25(2006):1008-1021. doi:10.1016/j.euromechflu.2006.02.003.

He Y, Zhao YM, Long Y. 2013. New exact solutions for a higher-order wave equation of KdV type using extended F-expansion method. *Mathematical Problems in Engineering*. Volume 2013, Article ID 128970, 8 pages. doi:10.1155/2013/128970.

Jacobi CGJ. 1829. *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*. Konigsberg: Cambridge University Press.

Johnson RS. 1997. *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Naher H, Abdullah FA. 2012. The basic (G'/G)-expansion method for the fourth order Boussinesq equation. *Applied Mathematics*. 3(10):1144-1152. doi:10.4236/am.2012.310168.

Whitham GB. 1974. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley and Sons.

Yomba E. 2005. The extended fan's sub-equation method and its application to KdV-MKdV, BKK and variant Boussinesq equations. *Physics Letters A*. 336(6):463-476.

Zhang H. 2005. New exact travelling wave solutions for some nonlinear evolution equations. *Chaos, Solitons and Fractals*. 26(3):921-925. doi:10.1016/j.chaos.2005.01.035.

Zhao YM. 2013. F-expansion method and its application for finding new exact solutions to the Kudryashov-Sinelshchikov equation. *Journal of Applied Mathematics*. Volume 2013, Article ID 895760, 7 pages. doi:10.1155/2013/895760.

Lampiran 1 Penurunan Persamaan (3)

Berdasarkan Persamaan (1), diperoleh

$$U_T = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial T} = \left(\frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u_t\right) \times \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{l}\right) = \frac{ag}{l}u_t$$

$$U_X = \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial X} = \left(\frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u_x\right) \times \left(\frac{1}{l}\right) = \frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l}u_x$$

$$U_Z = \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial U}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial Z} = \left(\frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u_z\right) \times \left(\frac{1}{h_0}\right) = \frac{a\sqrt{gh_0}}{{h_0}^2}u_z$$

$$W_T = \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial W}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial T} = \left(\frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w_t\right) \times \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{l}\right) = \frac{agh_0}{l^2}w_t$$

$$W_X = \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial X} = \left(\frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w_x\right) \times \left(\frac{1}{l}\right) = \frac{a\sqrt{gh_0}}{l^2}w_x$$

$$W_Z = \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial Z} = \left(\frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w_z\right) \times \left(\frac{1}{h_0}\right) = \frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l}w_z$$

$$P_X = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial X} = (a\rho g p_x) \times \left(\frac{1}{l}\right) = \frac{a\rho g}{l}p_x$$

$$P_Z = \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial P}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial Z} = (a\rho g p_z) \times \left(\frac{1}{h_0}\right) = \frac{a\rho g}{h_0}p_z$$

sehingga Persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$U_T + UU_X + WU_Z = -\frac{1}{\rho}P_X$$

$$\frac{ag}{l}u_t + \left(\frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u\right)\left(\frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l}u_x\right) + \left(\frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w\right)\left(\frac{a\sqrt{gh_0}}{{h_0}^2}u_z\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{a\rho g}{l}p_x$$

$$\frac{ag}{l}u_t + \frac{a^2 g}{h_0 l}uu_x + \frac{a^2 g}{h_0 l}wu_z = -\frac{ag}{l}p_x$$

$$u_t + \frac{a}{h_0}uu_x + \frac{a}{h_0}wu_z = -p_x$$

$$u_t + \alpha uu_x + \alpha wu_z = -p_x$$

$$u_t + \alpha(uu_x + wu_z) = -p_x,$$

dan

$$W_T + UW_X + WW_Z = -\frac{1}{\rho}P_Z$$

$$\frac{agh_0}{l^2}w_t + \left(\frac{a}{h_0}\sqrt{gh_0}u\right)\left(\frac{a\sqrt{gh_0}}{l^2}w_x\right) + \left(\frac{a}{l}\sqrt{gh_0}w\right)\left(\frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l}w_z\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{a\rho g}{h_0}p_z$$

$$\frac{agh_0}{l^2}w_t + \frac{a^2 g}{l^2}uw_x + \frac{a^2 g}{l^2}ww_z = -\frac{ag}{h_0}p_z$$

$$\frac{{h_0}^2}{l^2}w_t + \frac{ah_0}{l^2}uw_x + \frac{ah_0}{l^2}ww_z = -p_z$$

$$\left(\frac{h_0}{l}\right)^2 w_t + \left(\frac{a}{h_0}\right)\left(\frac{h_0}{l}\right)^2 uw_x + \left(\frac{a}{h_0}\right)\left(\frac{h_0}{l}\right)^2 ww_z = -p_z$$

$$\beta w_t + \alpha\beta uw_x + \alpha\beta ww_z = -p_z$$

$$\beta[w_t + \alpha(uw_x + ww_z)] = -p_z,$$

serta

$$U_X + W_Z = 0$$
$$\frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l} u_x + \frac{a\sqrt{gh_0}}{h_0 l} w_z = 0$$
$$u_x + w_z = 0.$$

Lampiran 2 Penurunan Persamaan (17)

Transformasi yang digunakan adalah $u(x,t) = U(\xi),\ \xi = x - ct$.
Turunan-turunan parsial dari u adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_t &= -cU' \\ u_{tt} &= c^2U'' \\ u_x &= U' \\ u_{xx} &= U'' \\ u_{xxx} &= U''' \\ u_{xxxx} &= U^{(4)} \\ (u^2) &= U^2 \\ (u^2)_x &= 2UU' \\ (u^2)_{xx} &= 2(U')^2 + 2UU''. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) disubstitusikan ke Persamaan (11) sehingga diperoleh

$$c^2U'' - \alpha^2U'' - \beta(2(U')^2 + 2UU'') + U^{(4)} = 0. \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) diintegralkan terhadap ξ dua kali dan diatur semua konstanta pengintegralan sama dengan nol dengan proses sebagai berikut:

$$\int [c^2U'' - \alpha^2U'' - \beta(2(U')^2 + 2UU'') + U^{(4)}]\, d\xi = \int 0\, d\xi$$
$$c^2U' - \alpha^2U' - \beta(2UU') + U''' + k_1 = k_2 \qquad ;\text{ asumsi } k_1 = k_2 = 0$$
$$(c^2 - \alpha^2)U' - \beta(2UU') + U''' = 0$$
$$\int [(c^2 - \alpha^2)U' - \beta(2UU') + U''']\, d\xi = \int 0\, d\xi$$
$$(c^2 - \alpha^2)U - \beta U^2 + U'' + k_3 = k_4 \qquad ;\text{ asumsi } k_3 = k_4 = 0$$
$$(c^2 - \alpha^2)U - \beta U^2 + U'' = 0.$$

Lampiran 3 Penurunan Persamaan (20)

Penentuan $U^2(\xi)$ dari Persamaan (18):

$$U^2(\xi) = \left[A_0 + A_1F(\xi) + A_2F^2(\xi) + \frac{B_1}{F(\xi)} + \frac{B_2}{F^2(\xi)}\right]^2$$

$$\begin{aligned} U^2(\xi) = {} & {A_0}^2 + 2A_1B_1 + 2A_2B_2 + \frac{{B_2}^2}{F^4(\xi)} + \frac{2B_1B_2}{F^3(\xi)} + \frac{{B_1}^2+2A_0B_2}{F^2(\xi)} + \frac{2A_0B_1+2A_1B_2}{F(\xi)} + \\ & [2A_0A_1 + 2A_2B_1]F(\xi) + \left[{A_1}^2 + 2A_0A_2\right]F^2(\xi) + 2A_1A_2F^3(\xi) + \\ & {A_2}^2F^4(\xi). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Penentuan $U''(\xi)$ dari Persamaan (18):

$$U'(\xi) = A_1F'(\xi) - \frac{2B_2F'(\xi)}{F^3(\xi)} - \frac{B_1F'(\xi)}{F^2(\xi)} + 2A_2F(\xi)F'(\xi)$$

$$\begin{aligned} U''(\xi) = {} & 2A_2\big(F'(\xi)\big)^2 + \frac{6B_2\big(F'(\xi)\big)^2}{F^4(\xi)} + \frac{2B_1\big(F'(\xi)\big)^2}{F^3(\xi)} + A_1F''(\xi) - \frac{2B_2F''(\xi)}{F^3(\xi)} - \\ & \frac{B_1F''(\xi)}{F^2(\xi)} + 2A_2F(\xi)F''(\xi). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Persamaan (18), (3.1), dan (3.2) disubstitusi ke Persamaan (17) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & -\alpha^2A_0 - {A_0}^2\beta - 2A_1\beta B_1 - 2A_2\beta B_2 + A_0c^2 - \frac{\beta {B_2}^2}{F^4(\xi)} - \frac{2\beta B_1B_2}{F^3(\xi)} + \\ & \frac{-\beta {B_1}^2-\alpha^2B_2-2A_0\beta B_2+B_2c^2}{F^2(\xi)} + \frac{-\alpha^2B_1-2A_0\beta B_1-2A_1\beta B_2+B_1c^2}{F(\xi)} + [-\alpha^2A_1 - 2A_0A_1\beta - \\ & 2A_2\beta B_1 + A_1c^2]F(\xi) + \left[-\alpha^2A_2 - {A_1}^2\beta - 2A_0A_2\beta + A_2c^2\right]F^2(\xi) - \\ & 2A_1A_2\beta F^3(\xi) - {A_2}^2\beta F^4(\xi) + 2A_2\big(F'(\xi)\big)^2 + \frac{6B_2\big(F'(\xi)\big)^2}{F^4(\xi)} + \frac{2B_1\big(F'(\xi)\big)^2}{F^3(\xi)} + \\ & A_1F''(\xi) - \frac{2B_2F''(\xi)}{F^3(\xi)} - \frac{B_1F''(\xi)}{F^2(\xi)} + 2A_2F(\xi)F''(\xi) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kemudian Persamaan (15) dan (19) disubstitusi ke Persamaan (3.3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & -\alpha^2A_0 - {A_0}^2\beta - 2A_1\beta B_1 - 2A_2\beta B_2 + A_0c^2 + 2A_2h_0 + \frac{A_1h_1}{2} + \frac{B_1h_3}{2} + 2B_2h_4 + \\ & \frac{-\beta {B_2}^2+6B_2h_0}{F^4(\xi)} + \frac{-2\beta B_1B_2+2B_1h_0+5B_2h_1}{F^3(\xi)} + \frac{-\beta {B_1}^2-\alpha^2B_2-2A_0\beta B_2+B_2c^2+\frac{3}{2}B_1h_1+4B_2h_2}{F^2(\xi)} + \\ & \frac{-\alpha^2B_1-2A_0\beta B_1-2A_1\beta B_2+B_1c^2+B_1h_2+3B_2h_3}{F(\xi)} + [-\alpha^2A_1 - 2A_0A_1\beta - 2A_2\beta B_1 + A_1c^2 + \\ & 3A_2h_1 + A_1h_2]F(\xi) + \left[-\alpha^2A_2 - {A_1}^2\beta - 2A_0A_2\beta + A_2c^2 + 4A_2h_2 + \right. \\ & \left. \frac{3}{2}A_1h_3\right]F^2(\xi) + [-2A_1A_2\beta + 5A_2h_3 + 2A_1h_4]F^3(\xi) + \\ & \left[-{A_2}^2\beta + 6A_2h_4\right]F^4(\xi) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Semua koefisien dari $F^j(\xi)$ $(j = -4, -3, \dots, 3, 4)$ pada Persamaan (3.4) diatur menjadi nol sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar taklinear yaitu Persamaan (20).

Lampiran 4 Program *Mathematica* untuk penyelesaian Persamaan (20)

Kasus $h_1 = h_3 = 0$

Input:

$$\begin{aligned}\mathrm{Solve}[(&-a^2\mathrm{A0} - \mathrm{A0}^2b - 2\mathrm{A1}b\mathrm{B1} - 2\mathrm{A2}b\mathrm{B2} + \mathrm{A0}c^2 + 2\mathrm{A2h0} + 2\mathrm{B2h4} = \\ &= 0)\&\&(-b\mathrm{B2}^2 + 6\mathrm{B2h0} == 0)\&\&(-2b\mathrm{B1B2} + 2\mathrm{B1h0} = \\ &= 0)\&\&(-b\mathrm{B1}^2 - a^2\mathrm{B2} - 2\mathrm{A0}b\mathrm{B2} + \mathrm{B2}c^2 + 4\mathrm{B2h2} = \\ &= 0)\&\&(-a^2\mathrm{B1} - 2\mathrm{A0}b\mathrm{B1} - 2\mathrm{A1}b\mathrm{B2} + \mathrm{B1}c^2 + \mathrm{B1h2} = \\ &= 0)\&\&(-a^2\mathrm{A1} - 2\mathrm{A0A1}b - 2\mathrm{A2}b\mathrm{B1} + \mathrm{A1}c^2 + \mathrm{A1h2} = \\ &= 0)\&\&(-a^2\mathrm{A2} - \mathrm{A1}^2b - 2\mathrm{A0A2}b + \mathrm{A2}c^2 + 4\mathrm{A2h2} = \\ &= 0)\&\&(-2\mathrm{A1A2}b + 2\mathrm{A1h4} == 0)\&\&(-\mathrm{A2}^2b + 6\mathrm{A2h4} = \\ &= 0), \{\mathrm{A0}, \mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{B1}, \mathrm{B2}, c\}]\end{aligned}$$

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kuningan, Jawa Barat pada tanggal 17 April 1993 sebagai putri kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Jimmy dan Ibu Satinah.

Pendidikan formal yang ditempuh penulis yaitu di SD Negeri Pamarican 1 Karangantu lulus pada tahun 2005, SMP Mardi Yuana Serang lulus pada tahun 2008, SMA Negeri 1 Kota Serang lulus pada tahun 2011 dan pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Institut Pertanian Bogor (IPB) Program Sarjana (S1) melalui jalur SNMPTN Undangan. Penulis memilih mayor Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) dengan keahlian minor Statistika Terapan, Departemen Statistika, FMIPA.

Selama menuntut ilmu di IPB, penulis aktif di organisasi kemahasiswaan yaitu himpunan profesi Gumatika (Gugus Mahasiswa Matematika) FMIPA IPB sebagai Sekretaris Departemen Keilmuan (Saturnus) pada periode 2012-2013 dan sebagai staf Departemen Keilmuan (Incredible) pada periode 2013-2014. Penulis pernah terlibat dalam beberapa kegiatan kepanitiaan yang diselenggarakan oleh Gumatika, antara lain Panitia Math Camp Divisi Pendidikan tahun 2012 dan 2013, Panitia *Try Out* Kalkulus tahun 2013 dan 2014, Panitia *Welcome Ceremony Mathematics* (WCM) sebagai Penanggung Jawab Kelompok (PJK) tahun 2013, Panitia *IPB's Mathematics Challange* (IMC) Divisi Tim Khusus tahun 2013 dan Divisi Kesekretariatan tahun 2014, serta Panitia Matematika Ria sebagai Sekretaris tahun 2013 dan sebagai Ketua Divisi Kesekretariatan tahun 2014. Penulis juga pernah menjadi wakil dari IPB untuk mengikuti Olimpiade Sains Nasional bidang Matematika (ON-MIPA) di tingkat regional/wilayah III pada tahun 2014 dan 2015. Selain itu, penulis pernah menjadi pengajar tutorial Kalkulus mahasiswa BUD (Beasiswa Utusan Daerah) dan tutorial Landasan Matematika mahasiswa PPU Nias, serta menjadi asisten dosen untuk mata kuliah Kalkulus II pada tahun 2012 dan 2013, Kalkulus III pada tahun 2013 dan 2014, Analisis Kompleks pada tahun 2014, Analisis Numerik pada tahun 2014, dan Proses Stokastik Dasar pada tahun 2015. Penulis juga pernah mengikuti kegiatan IPB *Goes To Field* (IGTF) pada tahun 2014 sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.