

# E-Modul Lingkaran

*Berbasis*

Realistic Mathematics Education

---

Untuk SMA/MA Kelas XI

Riski Aspriyani, M.Pd  
Andriani Suzana, M.Pd

**E-Modul Interaktif**

**LINGKARAN**

*Berbasis*

*Realistic Mathematic Education (RME)*

**Untuk SMA/MA Kelas XI**

*Oleh:*

**Riski Aspriyani, M.Pd**

**Andriani Suzana, M.Pd**

## KATA PENGANTAR

Bersyukur atas segala nikmat dan karunia Allah SWT, sehingga penulis dapat menyelesaikan E-Modul Interaktif Persamaan Lingkaran berbasis RME berbantuan Geogebra untuk siswa SMA/MA kelas XI. E-Modul Interaktif ini disusun berdasarkan kurikulum KKNI agar siswa dapat mencapai kompetensi yang diharapkan.

E-Modul Interaktif ini diharapkan dapat membantu siswa dalam memahami konsep materi persamaan lingkaran secara jelas dan tepat. E-Modul ini berisi kegiatan pembelajaran yang dapat melatih siswa dalam menemukan pengalaman belajarnya dan mengeksplor kemampuan pemecahan masalah matematisnya sebab e-modul ini menggunakan pendekatan *Realistic Mathematic Education (RME)*. Selain itu dengan bantuan Geogebra dalam membuat grafiknya juga dapat memberikan ketertarikan siswa untuk belajar persamaan lingkaran yang diharapkan dapat meningkatkan kemampuan visualnya. E-Modul ini disusun secara sistematis dan runtut. Tentu penulis menyadari bahwa masih banyak yang perlu diperbaiki dari e-modul ini. Untuk itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun sehingga e-modul ini dapat menjadi lebih baik. Harapan kami, e-modul matematika ini dapat bermanfaat untuk siswa dan pembaca. Terima kasih.

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	ii
KATA PENGANTAR .....	iii
DAFTAR ISI .....	iv
SK, KD DAN INDIKATOR .....	v
PETUNJUK BAHAN AJAR.....	vi
PETA KONSEP .....	1
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 .....	2
A. Definisi Lingkaran .....	2
B. Persamaan Lingkaran .....	4
1. Persamaan Lingkaran Pusat di $(0,0)$ .....	4
2. Persamaan Lingkaran Pusat di $(a,b)$ .....	7
3. Persamaan Umum Lingkaran .....	9
C. Evaluasi Kegiatan Pembelajaran 1 .....	11
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 .....	12
A. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran .....	12
B. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran .....	14
C. Evaluasi Kegiatan Pembelajaran 2 .....	16
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3 .....	17
A. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Jika Diketahui Gradien Garis .....	17
B. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik Pada Lingkaran .....	20
C. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik di Luar Lingkaran .....	23
D. Hubungan Dua Lingkaran .....	26
E. Evaluasi Kegiatan Pembelajaran 3 .....	28
RANGKUMAN .....	29
EVALUASI AKHIR .....	31
GLOSARIUM .....	38
DAFTAR PUSTAKA .....	39
PENUTUP .....	40

## Standar Kompetensi, Kompetensi Dasar dan Indikator

### Standar Kompetensi

Siswa mampu menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya berkaitan dengan masalah matematika.

1. Siswa mampu mendeskripsikan dan menentukan persamaan lingkaran dan garis singgungnya sesuai dengan persyaratan yang ditentukan.
2. Siswa mampu menganalisis permasalahan matematika yang nyata berkaitan dengan materi persamaan lingkaran dan garis singgungnya.

### Kompetensi Dasar

### Indikator

1. Siswa mampu merumuskan persamaan lingkaran pusat di  $(0,0)$  atau pusat di  $(a,b)$
2. Siswa mampu merumuskan persamaan umum lingkaran
3. Siswa mampu menyelidiki kedudukan titik, garis terhadap lingkaran
4. Siswa mampu melukis dan mencari persamaan garis singgung lingkaran dengan persyaratan tertentu
5. Siswa mampu menganalisis hubungan dua buah lingkaran

## Petunjuk Bahan Ajar

E-Modul interaktif ini dapat digunakan dalam proses pembelajaran di kelas atau dapat pula digunakan secara mandiri oleh siswa. Modul ini disertai dengan kegiatan yang mengikuti pendekatan *Realistic Mathematic Education (RME)* berbantuan *Geogebra Application* sebagai upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematisnya. Pada modul ini, diawali dengan pemberian masalah awal dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan Lingkaran. Diharapkan, dengan menggunakan modul tersebut dapat memudahkan siswa dalam memahami dan menguasai konsep materi persamaan lingkaran beserta garis singgung lingkaran.

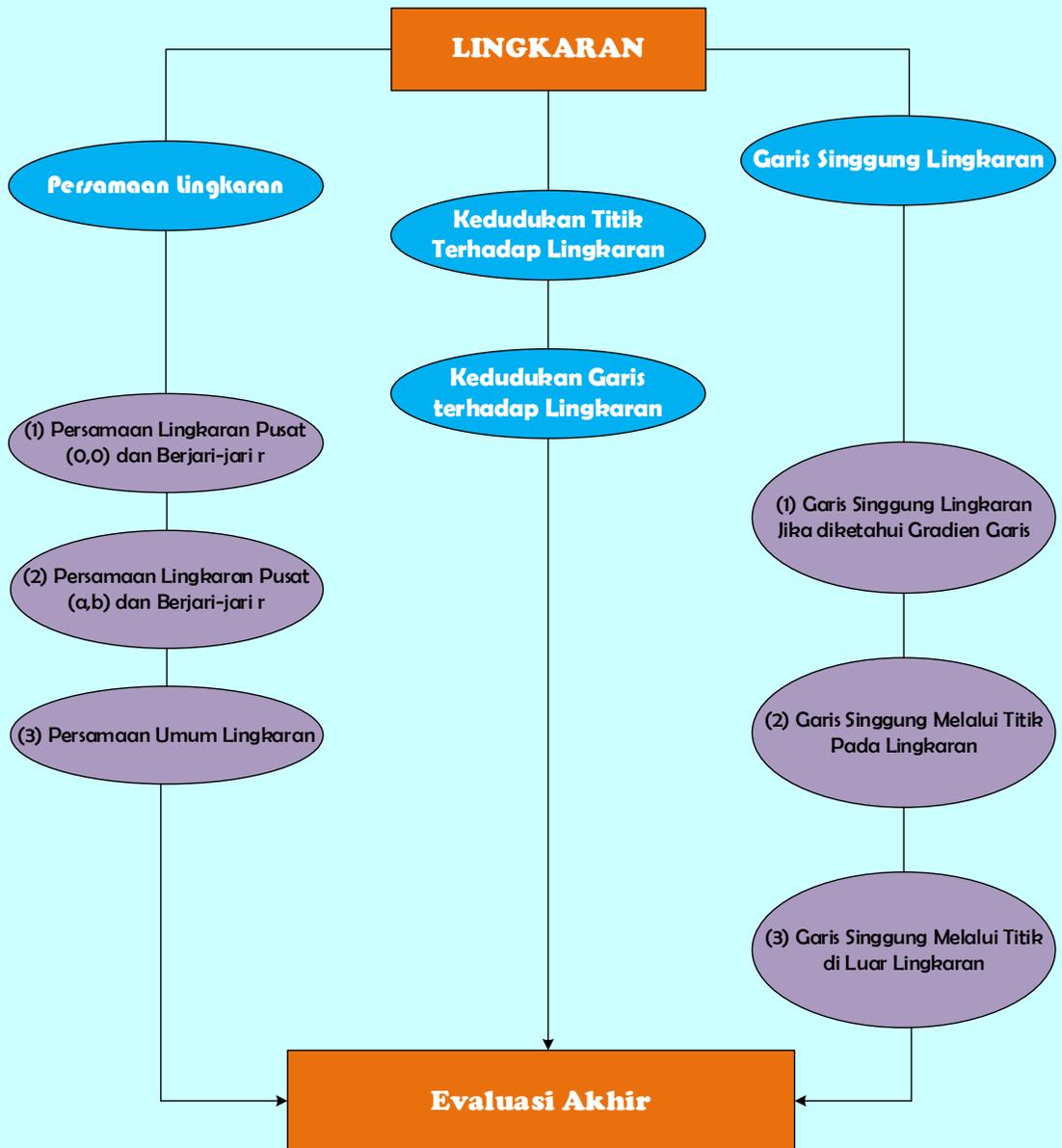
Kerangka kerja pendekatan RME pada modul ini adalah sebagai berikut.

- a. Memunculkan masalah kontekstual
- b. Kegiatan kerja menyelesaikan dari masalah awal yang diberikan secara mandiri atau kelompok
- c. Memperdalam materi pelajaran
- d. Kegiatan kerja siswa diakhir materi sebagai evaluasi

Langkah-langkah yang perlu diikuti dalam belajar persamaan lingkaran menggunakan e-modul interaktif berbasis RME ini adalah sebagai berikut.

1. Baca dan pahami tujuan pembelajaran yang terdapat pada halaman awal e-modul ini. Lakukan sesuai apa yang diperintahkan pada e-modul ini.
2. Apabila dalam mempelajari e-modul tersebut mengalami kesulitan, diskusikan dengan teman-teman yang lain atau bertanya kepada guru.
3. Setelah anda merasa paham dengan materi tersebut, kerjakan soal latihan yang tercantum di setiap akhir kegiatan.
4. Uraian kegiatan tersebut dianjurkan untuk diikuti agar mendapat tingkat pemahaman materi dan penguasaan materi yang baik.

# PETA KONSEP



## KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Tujuan Pembelajaran:

Siswa mampu merumuskan dan menjelaskan persamaan lingkaran pusat di  $(0,0)$ , pusat di  $(a,b)$  serta bentuk umum persamaan lingkaran

### A. DEFINISI LINGKARAN

Apakah kamu ingat bentuk dari roda sepeda? Ataukah kalian ingat bentuk permukaan gelas atau botol? Tentunya semua akan mengatakan, Lingkaran.



Sumber <https://pngdownload.id/>



Gambar 1. Sepeda Roda Dua dan Gelas Air

Banyak sekali benda di sekitar kita yang berbentuk lingkaran. Lingkaran salah satu bentuk yang unik karena dia tidak memiliki titik sudut, namun mempunyai titik tengah yang jika ditarik ke titik tertentu akan berjarak sama. Bahkan lingkaran juga banyak digunakan dalam masalah real, seperti ketika Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) memberikan peringatan gempa bumi kepada masyarakat, didekati dengan bentuk lingkaran. Titik yang diduga titik gempa ditarik beberapa radius kemudian ditarik melingkar sebagai bentuk pencarian desa atau kota mana saja yang dikatakan waspada gempa seperti pada Gambar 2 di bawah ini. Hal tersebut mendukung kita untuk lebih menguasai materi Lingkaran.



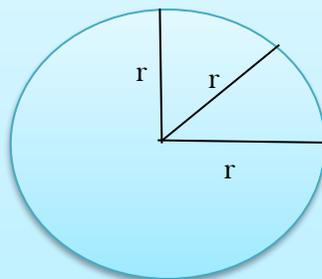
Gambar 2. Peta Lokasi Gempa

Perhatikan berikut ini!



Gambar 3. Roda Sepeda

Pada gambar roda sepeda di samping, terdapat jeruji-jeruji besi dengan ukuran panjang sama yang ditarik dari titik tengah lingkaran. Misal panjangnya adalah  $r$ .



Panjang  $r$  di namakan dengan radius (jari-jari lingkaran). Jari-jari lingkaran ditarik dari titik tengah lingkaran (pusat) ke lingkaran tersebut. 2 kali  $r$  atau  $2r$  disebut dengan diameter lingkaran ( $d$ ).

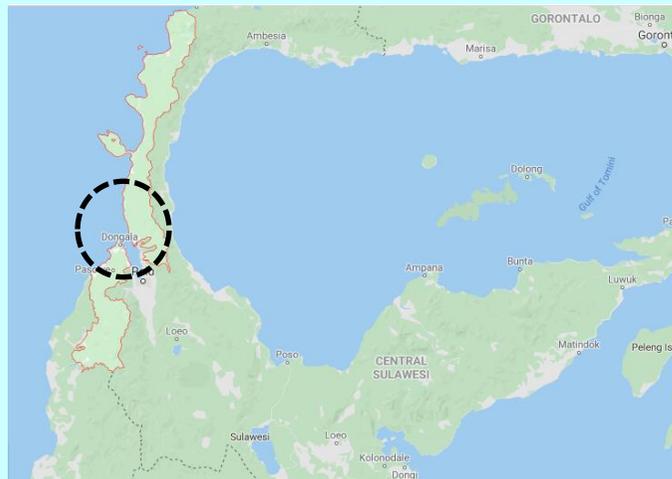
Sehingga, **Lingkaran** adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik tertentu (pusat lingkaran).

## B. PERSAMAAN LINGKARAN

### 1. Persamaan Lingkaran Pusat di $(0,0)$

Pahamilah persoalan berikut ini!

Gempa bumi di Donggala, Provinsi Sulawesi Tengah terjadi pada tanggal 28 september 2018 pukul 17.02 WIB.



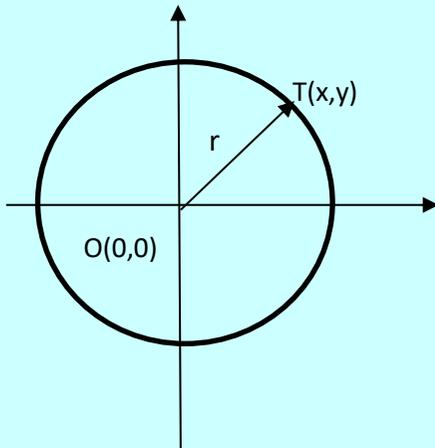
Gambar 4. Peta Kab. Donggala, Prov. Sulawesi Tengah

Pemerintah melalui BMKG harus membuat peringatan dini kepada masyarakat setempat daerah mana saja yang harus waspada dan dikosongkan penduduknya. Dimisalkan bahwa titik pusat gempa adalah titik sumbu pada bidang, dengan radius sekitar 36 km dari titik gempa ditarik secara melingkar sehingga berbentuk lingkaran.

#### SIAPA BISA?

- 1) Sketsakan ke dalam bentuk lingkaran dengan pusat gempa sebagai titik pusatnya dan daerah mana saja yang masyarakatnya harus waspada atau dikosongkan untuk mengungsi!
- 2) Apakah setiap titik pada sketsa lingkaran yang dibuat pada soal nomor 1, memiliki jarak yang sama terhadap titik tengah lingkaran?

Perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 5 Persamaan Lingkaran Pusat  $(0,0)$  dan Berjari-jari  $r$

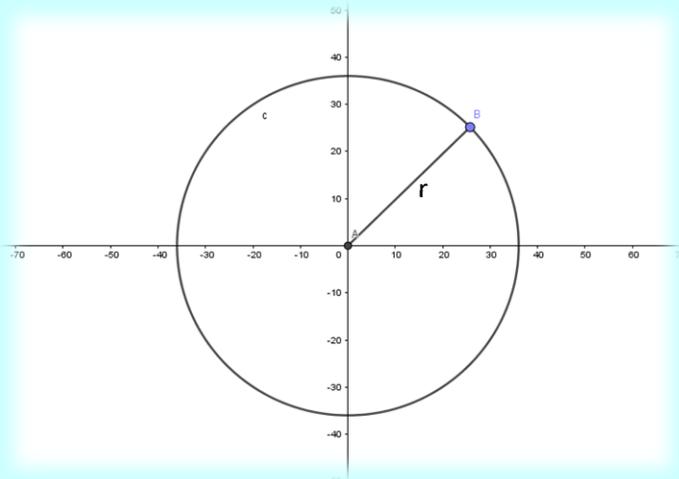
Berdasarkan definisi lingkaran, ambil sembarang titik  $T(x,y)$  pada lingkaran maka  $|OT| = r$  adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggunakan rumus jarak dua titik antara  $O(0,0)$  dan  $T(x,y)$  diperoleh bahwa:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r$$

akibatnya, dengan menguadratkan kedua ruas maka  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat  $O(0,0)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$

Berdasarkan persoalan sebelumnya, pada bagian “siapa bisa” untuk nomor 1 maka akan diperoleh bentuk sketsa sebagai berikut.



Gambar 6 Lingkaran Pusat  $(0,0)$  dan Berjari-jari 36

Akibatnya, untuk radius 36 km akan didapat persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 36^2$  atau  $x^2 + y^2 = 1296$ . Dengan demikian, daerah yang harus waspada adalah semua desa di Kabupaten Donggala serta Kota Palu.

**Contoh Soal!**

Selesaikan soal di bawah ini!

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan berjari-jari:
  - a)  $\sqrt{13}$
  - b) 5
  - c)  $3\sqrt{2}$
2. Tentukan jari-jari dari persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) berikut:
  - a)  $x^2 + y^2 = 16$
  - b)  $x^2 + y^2 = 72$

**Penyelesaian:**

1. (a)  $x^2 + y^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$  ; (b)  $x^2 + y^2 = 25$ ; (c)  $x^2 + y^2 = 18$
2. (a)  $r = 4$  ; (b)  $r = 6\sqrt{2}$

**Kegiatan Kerja Siswa 1**

1. Tentukan persamaan lingkaran yang :
  - a) melalui pusat (0,0) dan jari-jari  $\sqrt{15}$
  - b) melalui pusat (0,0) dan jari-jari 7
  - c) melalui pusat (0,0) dan jari-jari  $3\sqrt{7}$
  - d) melalui pusat (0,0) dan jari-jari  $4\sqrt{13}$
  - e) melalui pusat (0,0) dan titik (4, 5)
  - f) melalui pusat (0,0) dan titik (3, -6)
  - g) melalui pusat (0,0) dan titik (-2, 7)
2. Tentukan jari-jari lingkaran dengan pusat (0,0) berikut ini.
  - a)  $x^2 + y^2 = 8$
  - b)  $x^2 + y^2 = 25$
  - c)  $x^2 + y^2 = 36$
  - d)  $x^2 + y^2 = 45$
  - e)  $x^2 + y^2 = 125$

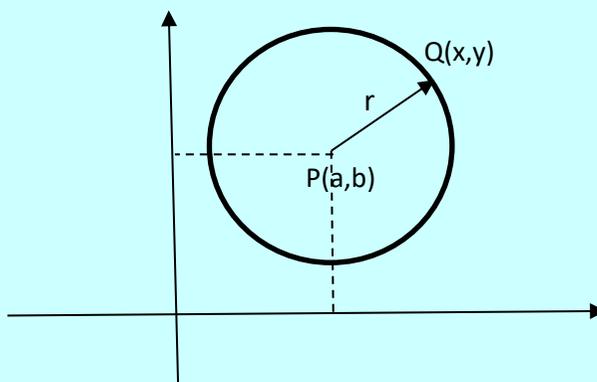
## 2. Persamaan Lingkaran Pusat di (a,b)

Siapa Bisa?

Berdasarkan kasus gempa sebelumnya Gambar 4, apabila pusat gempa pada titik koordinat  $P(12,8)$  dengan radius 36 km, **buatlah sketsa lingkarannya!**

**Bagaimana bentuk rumus persamaan lingkaran pusat di (a,b) dan berjari-jari r?**

Untuk mengetahui rumus persamaan lingkaran pusat di (a,b) dan jari-jari r, marilah kita amati gambar di bawah ini.



Gambar 7 Persamaan Lingkaran Pusat (a,b) dan berjari-jari r

Berdasarkan definisi lingkaran, ambil sembarang titik  $Q(x,y)$  pada lingkaran maka  $|PQ| = r$  adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggunakan rumus jarak dua titik antara  $P(a,b)$  dan  $Q(x,y)$  diperoleh bahwa:  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$  akibatnya, dengan mengkuadratkan kedua ruas maka  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat  $P(a,b)$  dan jari-jari  $r$  adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

## Contoh Soal!

1. Tentukan persamaan lingkaran:
  - a) dengan pusat (2,-1) dan berjari-jari 4
  - b) dengan pusat (4,5) dan berjari-jari  $2\sqrt{2}$
2. Tentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran:
  - a)  $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 64$
  - b)  $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 63$

## Penyelesaian:

1. (a)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  ; (b)  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$
2. a) pusat (5,2) dan berjari-jari  $r = 8$
- b) pusat (-4,-1) dan berjari-jari  $r = 3\sqrt{7}$

## Kegiatan Kerja Siswa 2

1. Tentukan persamaan lingkaran:
  - a) dengan pusat (-3,7) dan berjari-jari 9
  - b) dengan pusat (5,-10) dan berjari-jari 7
  - c) dengan pusat (1,1) dan berjari-jari  $\sqrt{5}$
  - d) dengan pusat (-4,-6) dan berjari-jari 5
  - e) melalui pusat (3, 1) dan titik (-1, -2)
  - f) melalui pusat (5, -2) dan titik (3, 4)
  - g) melalui pusat (6, - 1) dan titik (4, -2)
2. Tentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran:
  - a)  $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 36$
  - b)  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 20$
  - c)  $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 81$
  - d)  $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 72$

### 3. Persamaan Umum Lingkaran

Masih ingatkah bentuk persamaan lingkaran dengan pusat  $P(a,b)$ ?

Mari kita jabarkan bentuk persamaan tersebut, sehingga:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

$$\text{Dimisalkan } -2a = A, -2b = B, \text{ dan } a^2 + b^2 - r^2 = C$$

Akibatnya,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Persamaan ini adalah persamaan umum lingkaran, dengan pusat dan jari-jari lingkarannya adalah :

$$-2a = A \leftrightarrow a = -\frac{1}{2}A$$

$$-2b = B \leftrightarrow b = -\frac{1}{2}B$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = C \leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - C} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2\right) + \left(\frac{1}{4}B^2\right) - C}$$

Jadi, bentuk umum persamaan lingkaran adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , dengan pusat  $P(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$  dan

jari-jari  $r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2\right) + \left(\frac{1}{4}B^2\right) - C}$

#### Contoh Soal!

- Tentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran:
  - $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 4 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 3 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 5x - 8y + 2 = 0$
- Tentukan bentuk umum persamaan lingkaran jika diketahui:
  - $P(1,1); r = 4$
  - $P(2,-1); r = 3$
  - $P(3,2); r = 6$

## Penyelesaian

1. a)  $A = 4$ ;  $B = 6$ ;  $C = -4$

$$P(-2, -3) \text{ dan } r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}4^2\right) + \left(\frac{1}{4}6^2\right) + 4} = \sqrt{4 + 9 + 4}$$

$$\leftrightarrow r = \sqrt{17}$$

b)  $A = 8$ ;  $B = -10$ ;  $C = -3$

$$P(-4, 5) \text{ dan } r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}8^2\right) + \left(\frac{1}{4}(-10)^2\right) + 3}$$

$$\leftrightarrow r = \sqrt{16 + 25 + 3}$$

$$\leftrightarrow r = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

c)  $A = -5$ ;  $B = -8$ ;  $C = 2$

$$P\left(\frac{5}{2}, 4\right) \text{ dan } r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}(-5)^2\right) + \left(\frac{1}{4}(-8)^2\right) - 2}$$

$$\leftrightarrow r = \sqrt{\frac{25}{4} + 16 - 2}$$

$$\leftrightarrow r = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

2. a)  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$A = -2a = -2(1) = -2$$

$$B = -2b = -2(1) = -2$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = 1^2 + 1^2 - 4^2 = -14$$

$$\text{Sehingga, } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

b)  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$A = -2a = -2(2) = -4$$

$$B = -2b = -2(-1) = 2$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = 2^2 + (-1)^2 - 3^2 = -4$$

$$\text{Sehingga, } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

c)  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$A = -2a = -2(3) = -6$$

$$B = -2b = -2(2) = -4$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = 3^2 + 2^2 - 6^2 = -23$$

$$\text{Sehingga, } x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$$

## EVALUASI KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Tentukan persamaan lingkaran yang:
  - a. melalui pusat  $(0,0)$  dan jari-jari  $\sqrt{13}$
  - b. melalui pusat  $(0,0)$  dan titik  $(3, -6)$
  - c. melalui pusat  $(-5,10)$  dan jari-jari 7
  - d. melalui pusat  $(3, 1)$  dan titik  $(-1, -2)$
  - e. ujung-ujung diameternya  $P(2, 6)$  dan  $Q(-7, -2)$
  - f. melalui titik  $(-3, 4)$  dan sepusat dengan lingkaran  $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$
  - g. melalui pusat  $(3, -1)$  dan menyinggung garis  $y = 6$
2. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik:
  - a.  $A(2, -4)$ ,  $B(5, -1)$  dan  $C(2, 2)$
  - b.  $A(0, 6)$ ,  $B(0, 3)$  dan  $C(-4, 3)$
  - c.  $A(-2, 1)$ ,  $B(1, 1)$  dan  $C(-1, -1)$
3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran jika diketahui persamaan lingkaran sebagai berikut:
  - a.  $x^2 + y^2 = 16$
  - b.  $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$
  - c.  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$
  - d.  $3x^2 + 3y^2 + 24x - 9y - 72 = 0$
  - e.  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2x - 5y + 12 = 0$
  - f. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  berpusat di  $P(a, b)$  dan berjari-jari  $r$ , maka tentukan nilai  $(a - b + r)$
4. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + m = 0$  mempunyai jari-jari 9, maka tentukan nilai  $(m + 50)$ .
5. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + 24 = 0$  melalui titik  $A(1, 3)$  dan  $B(4, 6)$ . Tentukan diameter lingkaran tersebut.

## KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Tujuan pembelajaran:

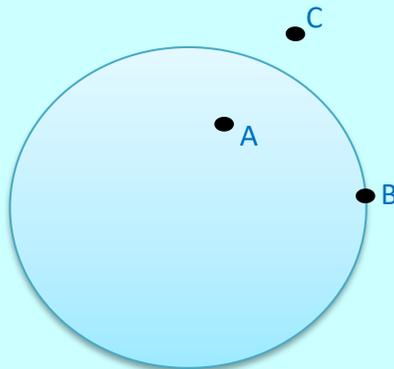
Siswa dapat menjelaskan dan mampu menyelidiki kedudukan titik terhadap lingkaran dan kedudukan garis terhadap lingkaran.

### A. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran

Yuk, dibaca dulu

Roni seorang siswa kelas XI mengikuti lomba Panah se-Kabupaten mewakili sekolahnya. Pada perlombaan Panah tradisional tersebut dengan sistem gugur, Roni tidak bisa masuk ke babak II dikarenakan ketika memanah sebanyak 3 kali menghasilkan: panah pertama (A) berada di dalam lingkaran, panah kedua (B) tepat pada garis lingkaran, panah ketiga (C) di luar lingkaran.

Kita lihat gambar berikut ini!



Gambar 8. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran

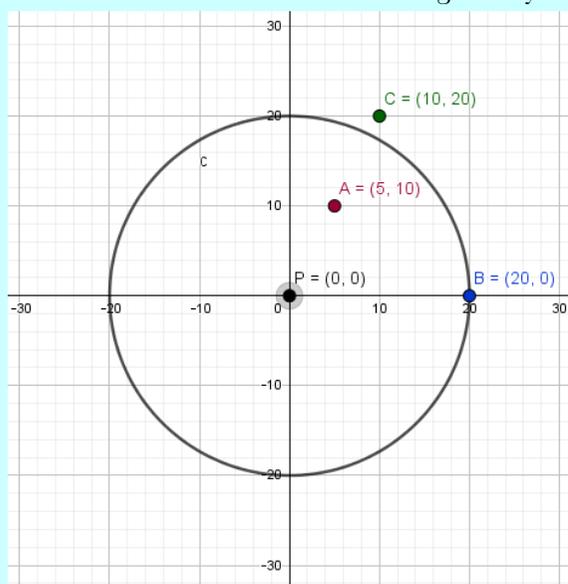
SIAPA BISA?

Bagaimana pendapat kalian mengenai letak titik A, titik B, dan titik C?

Kedudukan titik terhadap lingkaran memiliki tiga kemungkinan, yaitu:

1. **Titik terletak di dalam lingkaran**, apabila titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh:
  - a.  $x^2 + y^2 < r^2$ , atau
  - b.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ , atau
  - c.  $x^2 + y^2 + Ax + By + C < 0$
2. **Titik terletak pada lingkaran**, apabila titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh:
  - a.  $x^2 + y^2 = r^2$ , atau
  - b.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , atau
  - c.  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
3. **Titik terletak di luar lingkaran**, apabila titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh:
  - a.  $x^2 + y^2 > r^2$ , atau
  - b.  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ , atau
  - c.  $x^2 + y^2 + Ax + By + C > 0$

Berdasarkan kasus Roni di atas, jika lingkaran sasaran panahnya memiliki jari-jari 20 cm, diperoleh persamaan garis lingkaran dengan pusat di  $(0,0)$  adalah  $x^2 + y^2 = 400$ . Berikut ini adalah sketsa grafiknya.



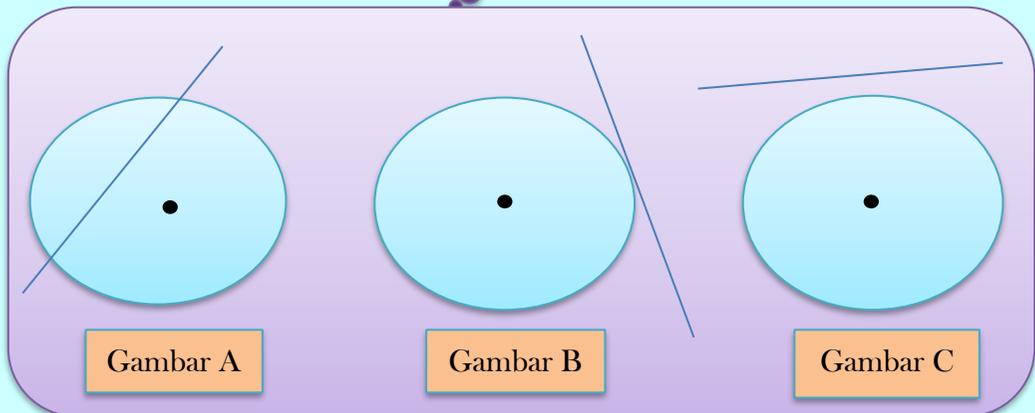
Gambar 9. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Akibatnya,

- Panah pertama (A) terletak di posisi (5,10) di dalam lingkaran sehingga berlaku  $L_A: x^2 + y^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125 < r^2$
- Panah pertama (B) terletak di posisi (20,0) pada lingkaran sehingga berlaku  $L_A: x^2 + y^2 = 20^2 + 0^2 = 400 + 0 = 400 = r^2$
- Panah pertama (C) terletak di posisi (10,20) di luar lingkaran sehingga berlaku  $L_A: x^2 + y^2 = 10^2 + 20^2 = 100 + 400 = 500 > r^2$

## B. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Marilah kita perhatikan gambar di bawah ini.



**SIAPA BISA?**

- Pada Gambar A, bagaimana letak garis terhadap lingkaran?
- Pada Gambar B, bagaimana letak garis terhadap lingkaran?
- Pada Gambar C, bagaimana letak garis terhadap lingkaran?

Kedudukan garis terhadap lingkaran memiliki tiga kemungkinan, yaitu:

- Garis memotong lingkaran**, syaratnya nilai diskriminan  $D > 0$
  - Garis menyinggung lingkaran**, syaratnya nilai diskriminan  $D = 0$
  - Garis tidak memotong dan tidak menyinggung**, syaratnya nilai diskriminan  $D < 0$
- dengan  $D = b^2 - 4ac$



### Contoh Soal

Tentukan kedudukan garis  $y = 3x - 2$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ !

#### Alternatif Penyelesaian:

Substitusikan  $y = 3x - 2$  ke persamaan  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ , sehingga:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3x - 2)^2 - 4x + 2(3x - 2) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 4x + 6x - 4 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 10x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 5x + 1 = 0$$

Mencari  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(5)(1) = 5 > 0$

Akibatnya kedudukan garis adalah memotong lingkaran

## EVALUASI KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Tentukan kedudukan titik  $A(3, 5)$ ,  $B(2, -3)$ , dan  $C(-1, 2)$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
2. Tentukan titik-titik (masing-masing minimal 3 titik) yang terletak di dalam, pada, dan di luar lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$  serta jelaskan alasannya
3. Tentukan kedudukan garis  $y = 4x - 2$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$
4. Tentukan nilai  $m$  agar garis  $y = -2x + m$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$
5. Jika garis  $y = 3$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$  di titik  $P$  dan  $Q$ , maka tentukan panjang  $PQ$

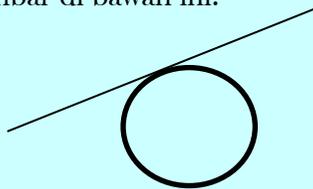
## KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Tujuan pembelajaran:

1. Siswa dapat menentukan, menjelaskan dan melukis garis singgung lingkaran sesuai dengan persyaratan tertentu.
2. Siswa mengetahui dan dapat menganalisis hubungan dua lingkaran

### Apa Itu Garis Singgung Lingkaran?

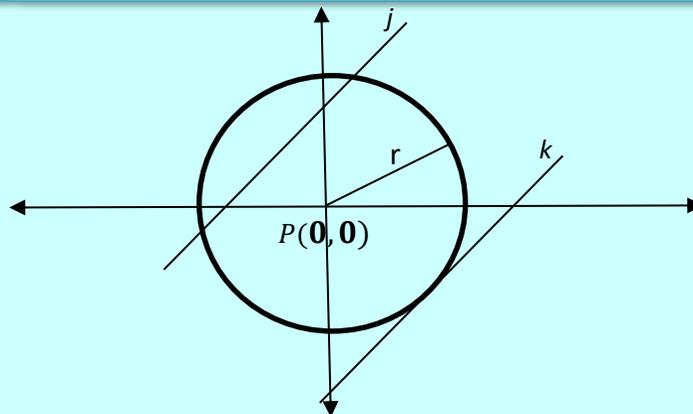
Ketika kita akan membuka botol minuman tentunya akan dibuka menggunakan alat pembuka botol atau kita bisa membukanya dengan menempelkan pinggir tutup botol dengan pinggir meja. Hal tersebut jika diilustrasikan akan membentuk seperti gambar di bawah ini.



Gambar 10 Sketsa Garis Singgung Lingkaran

Berdasarkan gambar tersebut dapat terlihat bahwa pinggir meja adalah garis lurus yang menyinggung tutup botol sebagai lingkarannya. Maka dengan demikian pasti akan ada satu titik singgung dari satu garis yang menyinggung lingkaran. Berikut ini adalah penjelasan dari persamaan garis singgung.

#### A. Persamaan Garis Singgung jika diketahui Gradien $m$



Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  dipotong oleh garis lurus  $y = mx + n_1$ .

Buat garis  $k$  yang sejajar garis  $j$ , sehingga persamaan garis  $k$ ;

$y = mx + n_2$  adalah garis singgung lingkaran tersebut.

Akibatnya,

$$x^2 + (mx + n_2)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mxn_2 + n_2^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (2mn_2)x + (n_2^2 - r^2) = 0$$

Persamaan tersebut adalah persamaan kuadrat dalam  $x$ . Garis singgung di atas memiliki satu titik persekutuan maka memiliki syarat bahwa nilai diskrimannya (D) sama dengan 0, yaitu:

$$\Leftrightarrow D = 0$$

$$\Leftrightarrow (2mn_2)^2 - 4(1 + m^2)(n_2^2 - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2n_2^2 - 4(n_2^2 - r^2 + m^2n_2^2 - m^2r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2n_2^2 - 4n_2^2 + 4r^2 - 4m^2n_2^2 + m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(n_2^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow n_2^2 - r^2 - m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow n_2^2 = r^2 + m^2r^2$$

$$\Leftrightarrow n_2 = \pm \sqrt{r^2 + m^2r^2}$$

$$\Leftrightarrow n_2 = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Sehingga persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  jika diketahui gradien garis singgung adalah  $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

Sejalan dengan cara seperti di atas dalam menentukan persamaan garis singgung lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  jika diketahui gradien garis singgung  $m$  sehingga diperoleh persamaan garis singgungnya sebagai berikut.

$$(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Siapa Bisa?

Bagaimana Langkah-langkah untuk memperoleh rumus di atas?

## Contoh Soal!

Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 6 = 0$  yang membentuk sudut  $60^\circ$  dengan sumbu x.

## Penyelesaian

Diketahui:  $A = -4$ ,  $B = -6$ ,  $C = -6$

Persamaan lingkaran dapat ditulis  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

$$m = \tan 60 = \sqrt{3} \text{ maka } (y - 3) = \sqrt{3}(x - 2) \pm 4\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\leftrightarrow (y - 3) = \sqrt{3}(x - 2) \pm 4\sqrt{4}$$

$$\leftrightarrow (y - 3) = \sqrt{3}(x - 2) \pm 8$$

$$\leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 8 + 3 \text{ dan } y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 8 + 3$$

Jadi persamaan garis singgung pada lingkaran tersebut adalah  $y = \sqrt{3}x + 11 - 2\sqrt{3}$  dan  $y = \sqrt{3}x - 5 - 2\sqrt{3}$

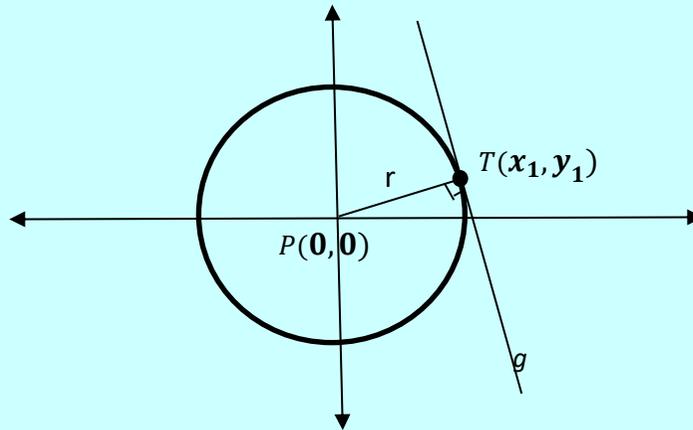
## Kegiatan Kerja Siswa 3

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dan ketentuan di bawah ini.

1.  $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$  yang bergradien  $-\frac{4}{3}$
2.  $x^2 + y^2 = 16$  yang sejajar dengan garis  $3x + 4y + 2 = 0$
3.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 81$  yang tegak lurus dengan garis  $x - 3y + 11 = 0$
4.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  yang sejajar dengan garis  $4x - 2y + 7 = 0$
5.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$  yang membentuk sudut  $135^\circ$  terhadap sumbu X positif

## B. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik $T(x_1, y_1)$ pada Lingkaran

### 1) Lingkaran Pusat di $P(0,0)$ dan Berjari-jari $r$



Gambar 11. Garis Singgung Lingkaran melalui titik pada Lingkaran  $P(0,0)$

Diketahui Titik  $T(x_1, y_1)$  dan persamaan lingkaran pusat  $(0,0)$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$

$T$  terletak pada lingkaran maka:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \dots \text{(i)}$$

$PT$  tegak lurus garis  $g$ , sehingga:

$$m_1(\text{gradien garis } PT) = \frac{y_1}{x_1} \text{ dan } m_2(\text{gradien garis } g) = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Akibatnya, persamaan garis  $g$  adalah

$$(y - y_1) = m_2(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow (y - y_1) = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

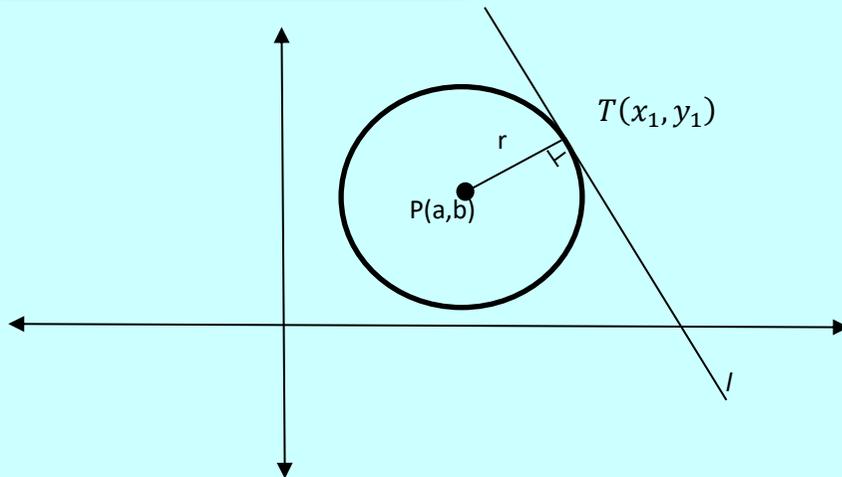
$$\Leftrightarrow yy_1 - y_1y_1 = -xx_1 + x_1x_1$$

$$\Leftrightarrow yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2 \text{ (berdasarkan i)}$$

$$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = r^2$$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran pusat  $(0,0)$  dan berjari-jari  $r$  adalah  $xx_1 + yy_1 = r^2$

## 2) Lingkaran Pusat di P(a,b) dan Berjari-jari r



Gambar 12. Garis Singgung melalui titik pada Lingkaran Pusat (a,b) berjari-jari r

Diketahui Titit  $T(x_1, y_1)$  dan persamaan lingkaran pusat (a,b) adalah  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

T terletak pada lingkaran maka:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

$$\leftrightarrow x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = r^2$$

$$\leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2 \dots (i)$$

PT tegak lurus garis  $l$ , sehingga:

$$m_1(\text{gradien garis PT}) = \frac{y_1 - b}{x_1 - a} ; m_2(\text{gradien garis } g) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Akibatnya, persamaan garis  $l$  adalah

$$(y - y_1) = m_2(x - x_1)$$

$$\leftrightarrow (y - y_1) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$$\leftrightarrow (y_1 - b)(y - y_1) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$\leftrightarrow yy_1 - y_1^2 - by + by_1 = -x_1x + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$\leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_1x - ax + ax_1 + yy_1 - by + by_1 \quad (\text{berdasarkan } i)$$

Diperoleh:

$$\leftrightarrow x_1x - ax + ax_1 + yy_1 - by + by_1 = r^2 + 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - b^2$$

$$\leftrightarrow x_1x - ax_1 - ax + a^2 + yy_1 - by_1 - by + b^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran pusat  $(a, b)$  dan berjari-jari  $r$  adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

### Contoh Soal!

1. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 36$  di titik  $(2, -3)$ .
2. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$  di titik  $(4, -2)$ .

### Penyelesaian:

1. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 36$  pada titik  $(2, -3)$  adalah
 
$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y = 36$$
2.  $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$ 

$$\Leftrightarrow (x - 2)(4 - 2) + (y + 1)(-2 + 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow (2)(x - 2) + (-1)(y + 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 - y - 1 - 5 = 0$$

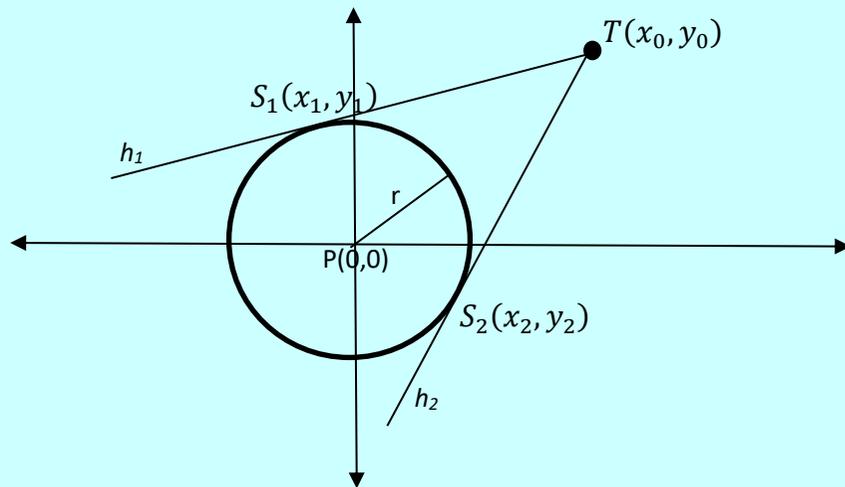
$$\Leftrightarrow 2x - y - 10 = 0$$

### Kegiatan Kerja Siswa 4

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dan ketentuan di bawah ini.

1.  $x^2 + y^2 = 13$  di titik  $(-2, 3)$
2.  $x^2 + y^2 = 16$  di titik  $(4, 8)$
3.  $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 13$  di titik  $(-5, 8)$
4.  $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$  di titik  $(9, 5)$
5.  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$  di titik yang berabsis  $-1$

### C. Persamaan Garis Singgung Melalui Titik $T(x_0, y_0)$ di Luar Lingkaran



Gambar 13. Garis Singgung melalui Titik di Luar Lingkaran  $P(0,0)$

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_0, y_0)$  di luar lingkaran dapat dilakukan mengikuti langkah-langkah di bawah ini.

#### Langkah 1

Misalkan garis yang melalui titik  $T(x_0, y_0)$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  di titik  $S_1(x_1, y_1)$  maka persamaan garis singgung tersebut adalah

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad \dots (i)$$

#### Langkah 2

Garis singgung (i) melalui titik  $T(x_0, y_0)$  sehingga berlaku

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$$

buat ke dalam bentuk eksplisit misal  $x_1 = \frac{r^2 - y_0y_1}{x_0} \quad \dots (ii)$

#### Langkah 3

Karena  $S_1(x_1, y_1)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  maka dipenuhi

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad \dots (iii)$$

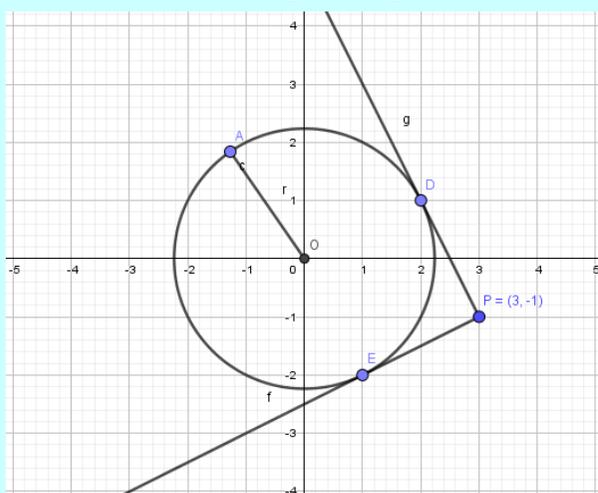
#### Langkah 4

Substitusikan persamaan (ii) ke persamaan (iii) sehingga akan diperoleh titik-titik singgungya. Kemudian substitusikan titik-titik singgung yang diperoleh tersebut ke persamaan (i) maka akan didapat persamaan-persamaan garis singgung lingkaran yang dicari.

Siapa Bisa?

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  yang melalui titik  $P(3,-1)$  di luar lingkaran!

Alternatif Penyelesaian! Yuk, ikuti langkah-langkah untuk menyelesaikannya.



Gambar 14 Garis Singgung melalui Titik  $P(3,-1)$  di Luar Lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$

### Langkah 1

Misalkan garis yang melalui titik  $P(3,-1)$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  di titik  $D(x_1, y_1)$  maka persamaan garis singgungnya  $x_1x + y_1y = 5 \dots (i)$

### Langkah 2

Garis singgung melalui titik  $P(3,-1)$  maka berlaku  $3x_1 - y_1 = 5$

$$\Leftrightarrow y_1 = 3x_1 - 5 \dots (ii)$$

### Langkah 3

Karena  $D(x_1, y_1)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  sehingga dipenuhi  $x_1^2 + y_1^2 = 5 \dots (iii)$

**Langkah 4**

Substitusikan persamaan (ii) ke persamaan (iii)

$$x_1^2 + y_1^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (3x_1 - 5)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 9x_1^2 - 30x_1 + 25 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0 \quad (\text{dibagi } 10)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$$

$$(x_1 - 2)(x_1 - 1) = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ atau } x_1 = 1$$

$$x_1 = 2 \text{ maka } y_1 = 3(2) - 5 = 1 \text{ maka titiknya } (2,1)$$

$$x_1 = 1 \text{ maka } y_1 = 3(1) - 5 = -2 \text{ maka titiknya } (1, -2)$$

Misal titik D = (2,1); garis singgungnya  $g: 2x + y = 5$

titik E = (1,-2); garis singgungnya  $f: x - 2y = 5$

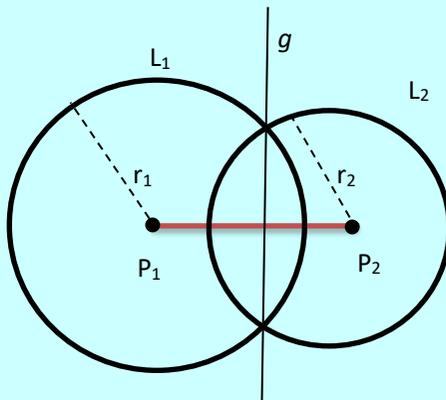
**Kegiatan Kerja Siswa 5**

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  yang ditarik dari titik  $A(7, 1)$ .
2. Carilah garis-garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 10$  yang ditarik dari titik  $B(4, 2)$
3. Carilah garis-garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$  yang ditarik dari titik  $C(1, 6)$

**Tahukah kamu?**

Bagaimana hubungan antara  
Dua Buah Lingkaran?

1. Dua Lingkaran yang Berpotongan

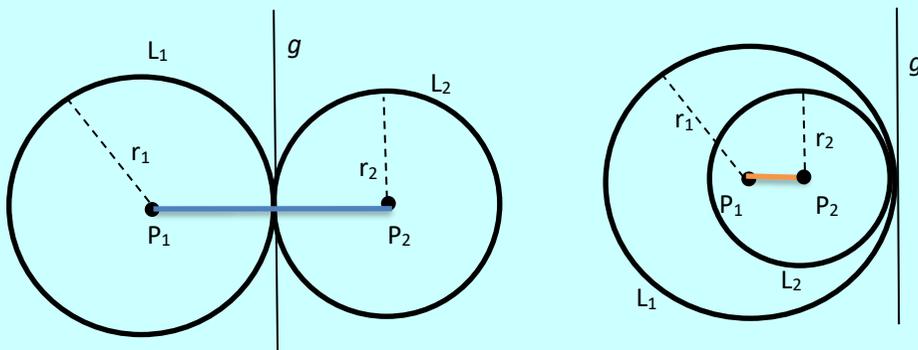


Jika  $D = b^2 - 4ac > 0$  maka  $L_1$  Berpotongan dengan  $L_2$  di dua titik. Nilai  $D$  ditentukan dari hasil  $L_1 - L_2 = 0$ .

Dalam hal ini  $r_1 + r_2 > P_1P_2$

Gambar 15 Dua Lingkaran Berpotongan

2. Dua Lingkaran Bersinggungan di Satu Titik



Gambar 16 Dua Lingkaran Bersinggungan di Luar dan di dalam

Jika  $D = 0$  maka  $L_1$  Bersinggungan dengan  $L_2$  di satu titik.

a. Bersinggungan di luar

Dalam hal ini  $r_1 + r_2 = P_1P_2$

b. Bersinggungan di dalam

$r_1 - r_2 = P_1P_2$

## 3. Dua Lingkaran Saling Lepas

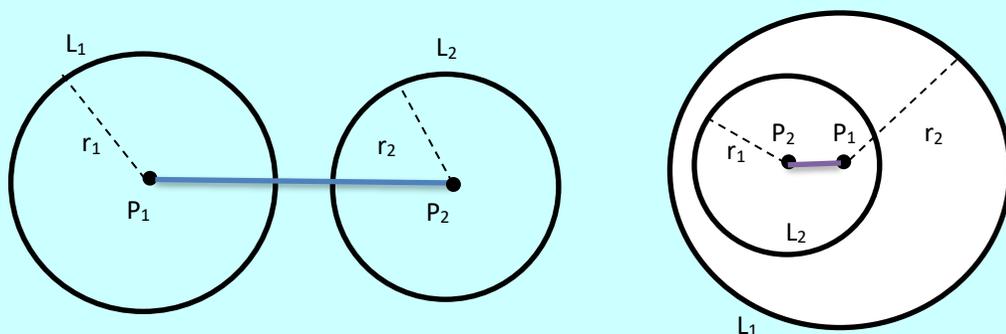
Jika  $D < 0$  maka dua lingkaran  $L_1, L_2$  **Saling Lepas**.

a. Dua lingkaran saling lepas di luar

Dalam hal ini maka  $r_1 + r_2 < P_1P_2$

b. Dua lingkaran saling lepas di dalam

$r_1 - r_2 < P_1P_2$



Gambar 17 Dua Lingkaran Saling Lepas di Luar dan Di dalam

**Contoh Soal!**

Tentukan hubungan antara lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x + 6y - 56 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$ .

**Alternatif Penyelesaian**

$$L_1 - L_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y - 56 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$$

$$\hline 16x + 12y - 32 = 0 \text{ (dibagi 4)}$$

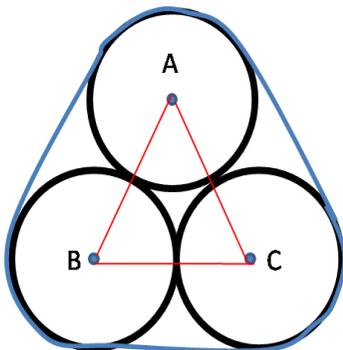
$$\leftrightarrow 4x + 3y - 8 = 0$$

Sehingga,  $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(4)(-8) = 137 > 0$

Oleh karena itu, disimpulkan bahwa dua lingkaran  $L_1, L_2$  berpotongan.

## EVALUASI KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Tentukan garis singgung lingkaran  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$  yang tegak lurus dengan garis  $x - 2y + 8 = 0$
2. Carilah persamaan garis singgung lingkaran  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 6$  di titik yang berabsis 4
3. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  yang ditarik dari titik  $A(7, 1)$
4. Tentukan hubungan antara lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$
5. Jika lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 20y + 55 = 0$  saling bersinggungan, maka tentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran tersebut
6. Tentukan panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 8x + 16y + 55 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$
7. Perhatikan gambar berikut:



Tiga buah pipa yang masing-masing berdiameter 7 cm diikat seperti gambar di atas. Tentukan panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat pipa.

## Rangkuman

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik tertentu
2. persamaan lingkaran dengan pusat  $O(0,0)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$
3. persamaan lingkaran dengan pusat  $P(a,b)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
4. Jadi, bentuk umum persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ dengan pusat } P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

$$\text{dan jari-jari } r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2\right) + \left(\frac{1}{4}B^2\right) - C}$$

5. Kedudukan titik terhadap lingkaran memiliki tiga kemungkinan, yaitu:
  - a. Titik terletak di dalam lingkaran, syaratnya jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh  $x^2 + y^2 < r^2$ , atau  $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ , atau  $x^2 + y^2 + Ax + By + C < 0$
  - b. Titik terletak pada lingkaran, syaratnya jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh  $x^2 + y^2 = r^2$ , atau  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , atau  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
  - c. Titik terletak di luar lingkaran, syaratnya jika titik tersebut disubstitusikan ke persamaan lingkaran diperoleh  $x^2 + y^2 > r^2$ , atau  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ , atau  $x^2 + y^2 + Ax + By + C > 0$
6. Kedudukan garis terhadap lingkaran memiliki tiga kemungkinan, yaitu:
  - a. Garis memotong lingkaran, syaratnya nilai diskriminan  $D > 0$
  - b. Garis menyinggung lingkaran, syaratnya nilai diskriminan  $D = 0$
  - c. Garis tidak memotong dan tidak menyinggung, syaratnya nilai diskriminan  $D < 0$

7. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  jika diketahui gradien garis singgung adalah  $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$
8. Persamaan garis singgung lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  jika diketahui gradien garis singgung adalah  $(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$
9. Persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran pusat  $(0,0)$  dan berjari-jari  $r$  adalah  $xx_1 + yy_1 = r^2$
10. Persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_1, y_1)$  pada lingkaran pusat  $(a,b)$  dan berjari-jari  $r$  adalah  $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
11. Persamaan garis singgung melalui titik  $T(x_0, y_0)$  di luar lingkaran dapat dilakukan mengikuti langkah-langkah:
- Langkah 1  
Misalkan garis yang melalui titik  $T(x_0, y_0)$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  di titik  $S_1(x_1, y_1)$  maka persamaan garis singgung tersebut adalah  
$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad \dots (i)$$
  - Langkah 2  
Garis singgung (i) melalui titik  $T(x_0, y_0)$  sehingga berlaku  $x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$  buat ke dalam bentuk eksplisit misal  $x_1 = \frac{r^2 - y_0y_1}{x_0} \quad \dots (ii)$
  - Langkah 3  
Karena  $S_1(x_1, y_1)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  maka dipenuhi  
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad \dots (iii)$$
  - Langkah 4  
Substitusikan persamaan (ii) ke persamaan (iii) sehingga akan diperoleh titik-titik singgungya. Kemudian substitusikan titik-titik singgung yang diperoleh tersebut ke persamaan (i) maka akan didapat persamaan-persamaan garis singgung lingkaran yang dicari.
12. Hubungan dari dua buah lingkaran antara lain dua lingkaran yang berpotongan, dua lingkaran bersinggungan di satu titik, dua lingkaran saling lepas.

## EVALUASI AKHIR

Waktu: 120 Menit

Selesaikan soal di bawah ini!

- Persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(0, 0)$  dan melalui titik  $(2\sqrt{2}, 3)$  adalah ....
  - $x^2 + y^2 = 13$
  - $x^2 + y^2 = 14$
  - $x^2 + y^2 = 17$
  - $x^2 + y^2 = 22$
  - $x^2 + y^2 = 25$
- Lingkaran  $L_1$  sepusat (konsentris) dengan lingkaran  $L_2: x^2 + y^2 = 8$ . Jika jari-jari lingkaran  $L_1$  sama dengan dua kali jari-jari lingkaran  $L_2$ , maka persamaan lingkaran  $L_1$  adalah ....
  - $x^2 + y^2 = 16$
  - $x^2 + y^2 = 22$
  - $x^2 + y^2 = 24$
  - $x^2 + y^2 = 32$
  - $x^2 + y^2 = 36$
- Persamaan lingkaran yang berpusat di  $P(2, 5)$  dan berjari-jari 6 adalah ....
  - $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 7 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 4x + 10y - 7 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 7 = 0$
- Diameter lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$  adalah ....
  - $\sqrt{5}$
  - $\sqrt{10}$
  - 5
  - 10
  - 15

5. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$  berpusat di  $P(a, b)$ , maka nilai  $(a + b)$  adalah ....
- A.  $-2$
  - B.  $-1$
  - C.  $1$
  - D.  $2$
  - E.  $3$
6. Persamaan lingkaran yang melalui titik-titik  $A(2, -4)$ ,  $B(5, -1)$  dan  $C(2, 2)$  adalah ....
- A.  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$
  - B.  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$
  - C.  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
  - D.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$
  - E.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
7. Persamaan lingkaran yang berpusat di  $(2, -3)$  dan menyinggung garis  $3x - 4y + 7 = 0$  adalah ....
- A.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$
  - B.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
  - C.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$
  - D.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 16 = 0$
  - E.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 16 = 0$
8. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + p = 0$  mempunyai jari-jari  $3$ , maka nilai  $(p + 5)$  adalah ....
- A.  $-4$
  - B.  $-2$
  - C.  $1$
  - D.  $2$
  - E.  $9$
9. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 + ax + by + 19 = 0$  melalui titik  $P(-2, 9)$  dan  $Q(4, 3)$ . Nilai  $(a - b)^2$  adalah ....
- A.  $10$
  - B.  $12$
  - C.  $14$
  - D.  $50$
  - E.  $100$
10. Jika titik  $M(m, 3)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 13x + 5y + 6 = 0$ , maka nilai  $m$  yang memenuhi adalah ....
- A.  $-10$
  - B.  $-3$

- C. 0  
D. 1  
E. 3
11. Kedudukan garis  $y = 2x - 1$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$  adalah ....  
A. Saling sejajar  
B. Bersinggungan  
C. Berpotongan di dua titik  
D. Berpotongan di tiga titik  
E. Tidak berpotongan dan bersinggungan
12. Nilai  $m$  agar garis  $y = mx - 2$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 9 = 0$  adalah ....  
A.  $-4$   
B.  $-2$   
C.  $2$   
D.  $-2$  dan  $2$   
E.  $-4$  dan  $4$
13. Jika garis  $x + y - 8 = 0$  memotong lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ , maka salah satu koordinat titik potongnya adalah ....  
A.  $(2, 3)$   
B.  $(3, 5)$   
C.  $(5, 3)$   
D.  $(6, -2)$   
E.  $(6, -3)$
14. Diketahui titik  $A(1, 4)$  terletak pada lingkaran  $L_1: x^2 + y^2 + bx + (b + 10)y - 27 = 0$ . Pusat dan jari-jari lingkaran  $L_1$  berturut-turut adalah ....  
A.  $(3, -2)$  dan  $2\sqrt{10}$   
B.  $(3, -2)$  dan  $4\sqrt{10}$   
C.  $(3, -2)$  dan  $2\sqrt{5}$   
D.  $(3, 2)$  dan  $2\sqrt{10}$   
E.  $(3, 2)$  dan  $4\sqrt{10}$
15. Perhatikan koordinat titik berikut:

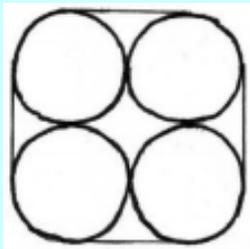
- (i)  $(3, -1)$
- (ii)  $(-3, 3)$
- (iii)  $(4, -2)$
- (iv)  $(-5, \sqrt{2})$
- (v)  $(5, 2\sqrt{3})$

Koordinat titik yang terletak di luar lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$  adalah ....

- A. (i), (ii), dan (iii)
  - B. (ii), (iii), dan (v)
  - C. (ii), (iv), dan (v)
  - D. (ii), (iii), dan (iv)
  - E. (iii), (iv), dan (v)
16. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran  $L \equiv (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$  di titik yang berabsis 6 adalah ....
- A.  $3x + 4y = -30$
  - B.  $3x + 4y = 30$
  - C.  $4x + 3y = 30$
  - D.  $3x - 4y = -38$
  - E.  $3x - 4y = -39$
17. Persamaan garis singgung lingkaran  $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  yang sejajar dengan garis  $4x - 2y + 7 = 0$  adalah ....
- A.  $y = 2x - 6 \pm 4\sqrt{5}$
  - B.  $y = 2x - 8 \pm 4\sqrt{5}$
  - C.  $y = 2x + 6 \pm 4\sqrt{5}$
  - D.  $y = 2x + 8 \pm 4\sqrt{17}$
  - E.  $y = 2x - 8 \pm 4\sqrt{17}$
18. Jika garis  $y = 2x - 4$  memotong lingkaran  $L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 20 = 0$  di titik A dan B, maka panjang AB adalah ....
- A.  $2\sqrt{6}$
  - B. 4
  - C. 6

- D.  $6\sqrt{2}$
- E.  $6\sqrt{3}$
19. Diketahui garis  $y = 3$  memotong lingkaran  $L \equiv x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ . Persamaan garis singgung yang melalui titik potong tersebut adalah ....
- A.  $x = -4$  dan  $x = 2$
- B.  $x = -2$  dan  $x = 2$
- C.  $x = -2$  dan  $x = 4$
- D.  $x = -2$  dan  $x = -4$
- E.  $x = 8$  dan  $x = -10$
20. Persamaan garis singgung lingkaran  $L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$  yang membentuk sudut  $45^\circ$  dengan sumbu X positif adalah ....
- A.  $y = x - 1 \pm \sqrt{18}$
- B.  $y = x + 1 \pm \sqrt{18}$
- C.  $y = x - 3 \pm 3\sqrt{2}$
- D.  $y = x + 2 \pm 3\sqrt{2}$
- E.  $y = x + 3 \pm 3\sqrt{2}$
21. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  yang ditarik dari titik  $Q(3, 2)$  adalah ....
- A.  $3x + 2y = 4$
- B.  $5x + 12y = 26$
- C.  $5x - 12y = 26$
- D.  $12x + 5y = 26$
- E.  $12x - 5y = 26$
22. Hubungan antara lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$  adalah ....
- A. Saling asing
- B. Berhimpit
- C. Bersinggungan di luar
- D. Bersinggungan di dalam
- E. Berpotongan di dua titik

23. Jika lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$  saling bersinggungan, maka koordinat titik singgung kedua lingkaran itu adalah ....
- (3, 1)
  - (4, 1)
  - (-2, 3)
  - (-3, 2)
  - (-3, -2)
24. Panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran  $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$  dan  $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 12y + 57 = 0$  adalah ....
- 1
  - 5
  - 10
  - 15
  - 20
25. Perhatikan gambar berikut:



Empat buah pipa yang masing-masing berdiameter 6 cm diikat seperti gambar di atas. Panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat pipa adalah ....

- $12 + 6\pi$
- $12 + 12\pi$
- $24 + 6\pi$
- $24 + 12\pi$
- $24 + 24\pi$

**Kunci Jawaban**

1. C	11. E	21. E
2. D	12. D	22. E
3. A	13. C	23. B
4. D	14. A	24. C
5. B	15. C	25. C
6. C	16. B	
7. B	17. B	
8. C	18. C	
9. E	19. A	
10. E	20. A	

## Glosarium

Diameter	:	Segmen garis lurus yang melintasi titik pusat dan menghubungkan dua titik pada lingkaran tersebut
Garis	:	Himpunan titik-titik yang berderet, terhubung secara kontinu, mempunyai panjang tak berhingga dan tidak mempunyai lebar
Garis Singgung	:	Garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik
Garis Singgung Persekutuan	:	Garis yang tepat menyinggung dua lingkaran
Gradien	:	Nilai kemiringan atau kecondongan suatu garis
Jari-Jari	:	Jarak dari pusat lingkaran ke titik manapun pada kelilingnya
Konsentris	:	Mempunyai pusat yang sama
Koordinat	:	Bilangan yang digunakan untuk menunjukkan lokasi suatu titik dalam garis, permukaan, atau ruang
Lingkaran	:	Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu (pusat lingkaran)
Pusat Lingkaran	:	Titik yang terletak di tengah-tengah lingkaran
Sudut	:	Dua buah sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya
Titik	:	Sesuatu yang memiliki kedudukan tetapi tidak mempunyai ukuran

## DAFTAR PUSTAKA

- Hadiwidjojo, Moeharti. 1973. *Ilmu Ukur Analitik*. Yogyakarta: Yayasan Pembina FKIE-IKIP.
- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2014. *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Semester 2*. Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.
- Purcell, Edwin J dan Varbeg, Dale. 1994. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.
- Suarsana, I Made. 2014. *Geometri Analitik*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Sukino. 2016. *Matematika Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu Alam untuk SMA/MA kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

## **PENUTUP**

E-Modul Lingkaran ini diharapkan dapat menjadi panduan bahan ajar untuk guru dalam proses pembelajaran di kelas, maupun sebagai panduan belajar mandiri siswa. E-Modul ini disusun secara interaktif menggunakan pendekatan *Realistic Mathematics Education* (RME) berbantuan *Geogebra Application* sebagai upaya dalam peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

Tentu banyak hal yang perlu diperbaiki dan dikembangkan dari E-Modul ini. Untuk itu kritik dan saran sangat penulis perlukan sebagai bahan pengembangan ke depannya.  
Terima kasih.

Penulis

