



**ANALISIS MODEL S-I-P INTERAKSI DUA SPESIES
PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI RESPON
HOLLING TIPE II**

skripsi
disajikan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh
Khoirun Ni'mah
4111411038

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG
2015**

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi yang berjudul "Analisis Model S-I-P Interaksi Dua Spesies *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon Holling Tipe II" bebas plagiat, dan apabila di kemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam skripsi ini, maka saya akan bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan perundang-undangan.

Semarang, 25 Mei 2015

The image shows a handwritten signature in black ink over a yellow rectangular stamp. The stamp contains the text 'KUTERAI TERAMPIL' at the top, a logo of a bird in flight on the right, and '6000' at the bottom. The signature is written across the stamp and extends to the left.

Khoirun Ni'mah

4111411038

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul

Analisis Model S-I-P Interaksi Dua Spesies *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon Holling Tipe II,

disusun oleh

Khoirun Ni'mah

4111411038

telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada tanggal 25 Mei 2015.



Prof. Dr. Wiyanto, M.Si
196310121988031001

Ketua Penguji

Drs. Supriyono, M.Si
195210291980031002

Anggota Penguji/
Pembimbing I

Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si.
196809071993031003

Sekretaris,

Drs. Arief Agostanto, M.Si
196807221993031005

Anggota Penguji/
Pembimbing II

Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc.
198210122005011001

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.

Maka apabila engkau telah selesai (dari satu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain), dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap

(Qs. Al-Insyirah, 6-8).

Menyesali nasib tidak akan mengubah keadaan. Terus berkarya dan berkejalah yang membuat kita berharga (K.H. Abdurrahman Wahid).

There is never enough time to do everything, but there always enough time to do the most important thing (Brian Tracy).

PERSEMBAHAN

- ❖ Untuk Ibu, Bapak dan ketiga adikku serta keluarga yang saya cintai dan selalu mendoakanku.
- ❖ Untuk Cynthia, Ratna Gun, Ika Rizkianawati, Susanti, Ulya, Nilam, Ruli, Gesti, Resti, Dwi, Yanti dan Iin yang telah membantu maupun memberikan semangat saat penyusunan skripsi ini.
- ❖ Untuk teman-teman Matematika 2011.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunia-Nya serta kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Model S-I-P Interaksi Dua Spesies *Predator-Prey* dengan Fungsi Respon Holling Tipe II".

Penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan berkat kerjasama, bantuan, dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Fathur Rokhman M.Hum, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Prof. Dr. Wiyanto, M.Si, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Arief Agoestanto, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Kristina Wijayanti, Ketua Prodi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
5. Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si dan Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc sebagai Dosen Pembimbing yang telah banyak memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis.
6. Drs. Supriyono, M.Sc, Dosen Penguji yang telah memberikan inspirasi, kritik, saran dan motivasi.
7. Ibu, Bapak dan ketiga adikku tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dorongan baik secara moral maupun spiritual.

8. Teman-teman Matematika 2011 yang selalu memberikan semangat dan motivasi.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penelitian ini.

Dengan segala keterbatasan, penulis menyadari bahwa penulis masih banyak kekurangan. Oleh karena itu penulis berharap perlu dikembangkan penelitian selanjutnya di masa mendatang.

Semarang, 25 Mei 2015

Khoirun Ni'mah

ABSTRAK

Ni'mah, K. 2015. *Model Matematika S-I-P pada Interaksi Dua Spesies Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I Prof. Dr. St. Budi Waluya, M.Si. dan Pembimbing II Muhammad Kharis, S.Si, M.Sc.

Kata kunci: Holling tipe II, routh-hurwitz, titik kesetimbangan, *predator-prey*.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menurunkan model matematika dari sistem *predator-prey* dua spesies dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey* dengan fungsi respon Holling tipe II, bagaimana menentukan titik kesetimbangan serta analisis kestabilan model S-I-P pada interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey*, bagaimana pengaruh perubahan parameter terhadap keadaan yang sebenarnya dari model S-I-P pada interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey* dan bagaimana simulasi numerik dari model S-I-P pada interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey*.

Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Langkah-langkah yang digunakan adalah menurunkan model matematika model S-I-P pada interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey*, menentukan semua titik tetap, menentukan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian, membuat simulasi numerik dari model S-I-P pada interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya penularan penyakit mematikan pada populasi *prey* penarikan kesimpulan.

Model matematika S-I-P menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey*. Sistem terdiri dari tiga persamaan diferensial yang merepresentasikan laju pertumbuhan populasi *susceptible-prey*, *infected-prey*, dan *predator* dalam suatu *carrying capacity*. Populasi *prey* dipengaruhi oleh adanya penyebaran penyakit dan pemangsaan oleh *predator* dengan parameter m dan A pada karakteristik respon *predator* yang berburu mangsa mengikuti Fungsi Holling tipe II.

Dari model matematika yang di turunkan diperoleh enam titik kesetimbangan dengan dua titik yang selalu tidak stabil dan empat titik ekulibrium yang akan bersifat stabil jika dipenuhi suatu kondisi. Secara umum, dapat disimpulkan bahwa penurunan nilai parameter tingkat pertumbuhan *predator* mempengaruhi kestabilan populasi. Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model dilakukan simulasi menggunakan *software* Maple 12. Simulasi model yang dilakukan memberikan hasil yang sama dengan hasil analisis.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN.....	ii
PENGESAHAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1. 1 Latar Belakang	1
1. 2 Rumusan Masalah.....	5
1. 3 Batasan Masalah	6
1. 4 Tujuan Penelitian	6
1. 5 Manfaat Penelitian	6
BAB 2 LANDASAN TEORI.....	8
2. 1 Sistem Persamaan Diferensial	8
2. 2 Model Pertumbuhan Logistik	9
2. 3 Model Populasi Epidemi.....	12

2. 4 Model Populasi <i>Predator-Prey</i>	13
2. 5 Fungsi Respon.....	15
2.5.1 Fungsi Respon Holling Tipe I.....	15
2.5.2 Fungsi Respon Holling Tipe II.....	16
2.5.3 Fungsi Respon Holling Tipe III	18
2. 6 Sistem Dinamik.....	21
2. 7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	25
2. 8 Kriteria Routh-Hurwitz.....	26
2. 9 Analisis Kestabilan Titik Tetap	29
2.10 Potret Fase Sistem Linear.....	31
BAB 3 METODE PENELITIAN.....	37
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	39
4.1 Unsur-Unsur yang Berpengaruh Terhadap Model.....	39
4.2 Pembentukan Model Epidemii <i>Predator-Prey</i> menggunakan Fungsi Respon Holling tipe II.....	40
4.2.1 Model Dasar Epidemii	41
4.2.2 Model Dasar <i>Predator-Prey</i> Lotka Volterra.....	42
4.2.3 Fungsi Logistik	43
4.2.4 Fungsi Respon Holling Tipe II.....	44
4.3 Titik Ekuilibrium	49
4.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium	56
4.4.1 Titik Ekuilibrium $E_0(0,0,0)$	58
4.4.2 Titik Ekuilibrium $E_1(1,0,0)$	60

4.4.3 Titik Ekuilibrium $E_2(0, y_1, 0)$	62
4.4.4 Titik Ekuilibrium $E_3(x_2, y_2, 0)$	65
4.4.5 Titik Ekuilibrium $E_4(0, y^*, z_1^*)$	72
4.4.6 Titik Ekuilibrium $E_5(x^*, y^*, z_2^*)$	78
4.5 Simulasi Model	87
4.5.1 Simulasi di Titik Ekuilibrium E_0 dan E_1 Kasus 2 dengan $m < C + 1$	88
4.5.2 Simulasi di Titik Ekuilibrium E_1 Kasus 1, E_2 dan E_3 dengan $m > C + 1$, $1 + \sqrt{2} < m$ dan $(\mu A - D)(m - 1 - C) > BD(m - 1)^2$	90
4.5.3 Simulasi di Titik Ekuilibrium E_4 dengan $D < 1$, $B + C > 1$ dan $\mu A - D < mBD$	93
4.5.4 Simulasi di Titik Ekuilibrium E_5 dengan $(m - C - 1)(\mu A - D) < \mu AB$, $m > 2$ dan $\mu B < 1$	95
BAB 5 PENUTUP	98
5.1 Simpulan	98
5.2 Saran	101
DAFTAR PUSTAKA	102
LAMPIRAN	104

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Daftar Titik Ekuilibrium, Nilai-Nilai Parameter Syarat	
Keberadaan Titik Ekuilibrium dan Kestabilan Titik Tetap	87

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Grafik $N(t)$ Model Logistik.....	12
Gambar 2.2 Trayektori untuk <i>Node Point</i>	31
Gambar 2.3 Trayektori untuk titik <i>Nodal Source</i>	32
Gambar 2.4 Trayektori untuk <i>Saddle Point</i>	32
Gambar 2.5 Trayektori untuk <i>Star Point</i>	33
Gambar 2.6 Trayektori untuk <i>Improper Node</i> dengan $\lambda < 0$	34
Gambar 2.7 Trayektori untuk <i>Improper Node</i> dengan $\lambda > 0$	34
Gambar 2.8 Trayektori untuk <i>Stabil Spiral</i>	35
Gambar 2.9 Trayektori untuk <i>Unstabil Spiral</i>	35
Gambar 2.10 Trayektori untuk <i>Center Point</i>	36
Gambar 4.1 Bidang Solusi Sistem pada Populasi <i>Predator-Prey</i> untuk Titik <div style="padding-left: 40px;"> Ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$ Kasus 2, $m < C + 1$..... </div>	88
Gambar 4.2 Potret Fase Sistem pada Populasi <i>Predator-Prey</i> untuk Titik <div style="padding-left: 40px;"> Ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$ Kasus 2, $m < C + 1$..... </div>	89
Gambar 4.3 Bidang Solusi Sistem pada Populasi <i>Predator-Prey</i> untuk Titik <div style="padding-left: 40px;"> Ekuilibrium $E_1(1,0,0)$ Kasus 1, $E_2(0, y_1, 0)$ dan $E_3 = (x_2, y_2, 0)$ dengan $m > C + 1$, $1 + \sqrt{2} < m$ dan $(\mu A - D)(m - 1 - C) >$ $BD(m - 1)^2$ </div>	91

Gambar 4.4 Potret Fase $E_1(1,0,0)$ Kasus 1, $E_2(0, y_1, 0)$ dan $E_3 = (x_2, y_2, 0)$
 dengan $m > C + 1$, $1 + \sqrt{2} < m$ dan $(\mu A - D)(m - 1 - C) >$
 $BD(m - 1)^2$ 92

Gambar 4.5 Bidang Solusi Sistem pada Populasi *Predator-Prey* untuk Titik
 Ekuilibrium $E_4 = (0, y^*, z_1^*)$ dengan $D < 1$, $B + C > 1$ dan $\mu A -$
 $D < mBD$ 93

Gambar 4.6 Potret Fase Sistem pada Populasi *Predator-Prey* untuk Titik
 Ekuilibrium $E_4 = (0, y^*, z_1^*)$ dengan $D < 1$, $B + C > 1$ dan
 $\mu A - D < mBD$ 94

Gambar 4.7 Bidang Solusi Sistem pada Populasi *Predator-Prey* untuk Titik
 Ekuilibrium $E_5 = (x^*, y^*, z_2^*)$ dengan
 $(m - C - 1)(\mu A - D) < \mu AB$, $m > 2$ dan $\mu B < 1$ 96

Gambar 4.8 Potret Fase Sistem pada Populasi *Predator-Prey* untuk Titik
 Ekuilibrium $E_5 = (x^*, y^*, z_2^*)$ dengan
 $(m - C - 1)(\mu A - D) < \mu AB$, $m > 2$ dan $\mu B < 1$ 97

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 *Print Out* Hasil Simulasi menggunakan *Software* Maple 12.... 104

BAB 1

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Ekosistem menurut Jorgensen (2009) merupakan partisi dari alam semesta pada umumnya. Dalam suatu ekosistem sedikitnya tersusun dari komponen hidup dan tak hidup. Komponen hidup yaitu manusia, hewan, dan tumbuhan sedangkan komponen tak hidup merupakan komponen pendukung kehidupan seperti air, tanah, udara, sinar matahari dan sebagainya.

Ekologi merupakan ilmu yang mempelajari tentang ekosistem. Salah satu bahasan penting dalam ekologi yakni rantai-makanan. Jorgensen (2009) mengatakan dalam suatu rantai makanan minimal terdapat dua macam spesies yaitu spesies *predator* atau pemangsa dan spesies *prey* atau mangsa. Rantai makanan merupakan penentu keseimbangan ekosistem, sehingga perlu dikaji mendalam. Kajian mengenai rantai makanan salah satunya yaitu pemodelan matematika *predator-prey* yang dikembangkan dalam cabang ilmu matematika ekologi.

Permasalahan lainnya yang terjadi dalam suatu populasi adalah epidemi. Guerrant *et al.* (2011) menjelaskan mengenai peristiwa epidemi dalam suatu populasi adalah “*When a disease occurs at a frequency higher than is expected, it is said to be epidemic. A localized epidemic may be referred to as an outbreak*”. Oleh karena itu dalam pemodelan matematika di kaji berbagai macam model matematis untuk mengetahui terjadi

atau tidaknya suatu epidemi dalam populasi. Model epidemi klasik membagi populasi menjadi dua kelas, yaitu kelas rentan (*susceptible*) dan terinfeksi (*infected*). Sub-populasi rentan, rentan terhadap infeksi dan sub-populasi yang terinfeksi dapat memindahkan infeksi ke individu rentan. Dalam model *S-I* ukuran populasi adalah $N = S + I$, di mana *S* adalah sub-populasi rentan dan *I* sub-populasi terinfeksi (Joydif & Sharma, 2009).

Sistem interaksi dalam ekosistem yang merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik adalah sistem interaksi *predator-prey*, di mana *prey* sebagai populasi yang dimangsa dan *predator* sebagai populasi yang memangsa (Du *et al.*, 2007). Sistem *predator-prey* adalah salah satu jenis sistem yang merupakan gabungan atau interaksi dari dua populasi yaitu *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Interaksi antar dua populasi ini sangat penting karena kelangsungan hidup makhluk hidup tergantung pada keseimbangan lingkungan disekitarnya. Keseimbangan tersebut dapat tercapai jika jumlah rata-rata populasi dari populasi *predator* dan *prey* yang sedang berinteraksi sesuai dengan ukuran dan proporsinya.

Model matematika *predator-prey* yang banyak dipakai adalah model yang terdiri atas dua spesies berbeda di mana salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya. Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2001).

Model matematika Lotka-Volterra dua spesies *predator-prey* dapat di tulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy,\end{aligned}\tag{1.1}$$

model (1.1) ini belum memperhitungkan waktu yang diperlukan oleh predator untuk mencerna makanannya serta kenyataan bahwa makanan dari prey sendiri yang terbatas sehingga model sederhana ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Salah satu modifikasi dilakukan dengan penambahan fungsi respon.

Fungsi respon dalam model interaksi *predator-prey* menurut Brauer & Chavez (2012) adalah jumlah makanan yang dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan makanan. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon tipe I, tipe II, dan tipe III. Fungsi respon tipe I terjadi pada predator yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu mangsanya. Sebagai contoh predatornya adalah laba-laba. Fungsi respon tipe II terjadi pada predator yang berkarakteristik aktif dalam mencari mangsa. Sebagai contoh predatornya adalah pada serigala. Ketika serigala berhasil menangkap mangsanya maka serigala juga memerlukan waktu untuk mencerna makanannya. Fungsi respon tipe III terjadi pada predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain ketika populasi prey yang dimakan mulai berkurang.

Para peneliti sebelumnya telah mengembangkan model *predator-prey* ketika terdapat wabah penyakit pada populasi predator atau prey. Das *et al.*

(2009) memodelkan epidemi *predator-prey* tiga spesies yang terdiri dari spesies *prey*, *intermediate predator* dan *top predator* pada kasus wabah penyakit terdapat pada populasi *prey* menggunakan fungsi respon yang digunakan adalah Holling tipe II. Pada kasus tersebut keberadaan laju infeksi penyakit menyebabkan kestabilan di sekitar titik-titik ekuilibrium selain pada titik ekuilibrium trivialnya.

Penelitian serupa dilakukan oleh Kooi *et al* (2011), yang meneliti model *predator-prey* dua spesies pada kasus penyakit hanya terjadi pada populasi *predator*. Pada model mekanisme cara *predator* berburu berdasarkan fungsi respon Holling Tipe II. Dari hasil analisis model tersebut juga diperoleh sistem yang lebih stabil dengan adanya kenaikan laju infeksi penyakit.

Berbeda dari kajian sebelumnya, dalam penelitian ini akan memodifikasi model epidemi predator-prey Chattopadhyay & Arino (1999) dengan model epidemi *predator-prey* yang terdiri dari dua spesies di mana *predator* berburu mangsa menggunakan mengikuti model Lotka-Volterra dan mekanisme penularan penyakit pada spesies *prey*.

Pada penelitian ini akan dikonstruksi model matematika epidemi *predator-prey* di mana terdapat penyebaran penyakit pada populasi *prey* yang mengikuti hukum aksi masa sederhana dan mekanisme cara berburu predator mengikuti fungsi respon Holling tipe II. Model matematika yang terbentuk terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *Susceptible-prey*, laju pertumbuhan populasi *infected-prey*, dan laju pertumbuhan populasi *predator*. Ketiga persamaan tersebut membentuk suatu sistem persamaan

diferensial biasa nonlinear (Boyce & DiPrima, 2001). Dari model tersebut dilakukan analisis dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh (Pastor, 2008).

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk menganalisis perilaku sistem predator-prey dan fungsi respon Holling tipe II. Sebuah tulisan dalam bentuk skripsi yang diformulasikan dengan judul “**ANALISIS MODEL S-I-P INTERAKSI DUA SPESIES *PREDATOR-PREY* DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II**”.

Perumusan Masalah dan Pembatasan Masalah

1.2.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat dirumuskan beberapa masalah yaitu:

- (a) Bagaimana menurunkan model matematika S-I-P dari sistem interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II?
- (b) Bagaimana dinamika sistem dengan adanya pengaruh perubahan parameter model matematika S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II?
- (c) Bagaimana simulasi numerik model matematika S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II?

1.2.2 Batasan Masalah

Pada penelitian ini masalah yang dikaji adalah pemodelan matematika pada predator prey dua spesies dengan adanya penularan penyakit pada spesies prey dan fungsi respon Holling Tipe II. Analisis terhadap model matematika dimulai dengan mencari titik kesetimbangan (*equilibrium*) kemudian memeriksa kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium*) tersebut.

Tujuan dan Manfaat

1.2.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian adalah:

- (a) Untuk menurunkan model matematika S-I-P dari sistem interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II.
- (b) Untuk menganalisis pengaruh perubahan parameter terhadap dinamika model matematika S-I-P dari sistem interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II.
- (c) Untuk membuat simulasi numerik dari model matematika S-I-P dari sistem interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II.

1.2.4 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan penelitian ini adalah:

- (a) Bagi Peneliti

Manfaat yang bisa diambil bagi peneliti adalah peneliti mampu menerapkan ilmu-ilmunya, khususnya tentang sistem pemodelan matematika. Sehingga dapat semakin memantapkan pemahaman mengenai

teori-teori yang di peroleh selama mengikuti perkuliahan serta mampu menerapkan ilmunya dalam kehidupan nyata.

(b) Bagi Jurusan Matematika FMIPA UNNES

Menambah perbendaharaan jurnal, khususnya tentang pemodelan matematika.

(c) Bagi Pembaca

Menambah pengetahuan tentang pemodelan matematika dan bisa menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang diketahui. Jika hanya terdapat satu fungsi tunggal yang akan ditentukan maka satu persamaan sudah cukup. Tetapi jika terdapat dua fungsi atau lebih yang tidak diketahui maka sebuah sistem persamaan diperlukan. Contohnya, persamaan Lotka-Volterra atau *predator-prey* yang merupakan contoh sistem persamaan dalam ekologi. Sistem persamaan tersebut mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) - \alpha x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \tilde{\alpha}x(t)y(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

(Waluya, 2011).

di mana

$x(t)$: populasi spesies *prey*,

$y(t)$: populasi spesies *predator*,

a : koefisien laju kelahiran dari populasi *prey*,

α : koefisien laju kematian spesies *prey* akibat predasi,

c : koefisien laju kematian alami *predator*,

$\tilde{\alpha}$: koefisien laju pertumbuhan spesies *predator* akibat predasi.

2.2 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model eksponensial $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$ yang memiliki solusi $x(t) = ke^{rt}$ di mana r merupakan angka pertumbuhan populasi dan k suatu nilai konstan. Model eksponensial $\frac{dx(t)}{dt}$ mempunyai kelemahan yaitu saat nilai laju pertumbuhan populasi $r > 0$ maka populasi tumbuh sampai tak terbatas. Hal ini mustahil terjadi, sehingga perlu adanya kajian lagi. Model ini diberikan dengan asumsi bahwa $r = R(N)$. Nilai $R(N)$ ditentukan oleh kelahiran dan pengaruh kepadatan populasi (keterbatasan luas lingkungan). Nilai $R(N)$ dapat dirumuskan dengan

$$R(N(t)) = a - bN(t), \quad (2.2)$$

di mana a menyatakan laju pertumbuhan populasi tanpa pengaruh lingkungan dan b menyatakan pengaruh dari pertambahan kepadatan populasi (semakin padat populasi maka persaingan antar individu semakin meningkat). Model pertumbuhan logistik dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{d(N(t))}{dt} = N(t)(a - bN(t)) \quad (2.3)$$

Titik ekuilibrium dari model (2.3) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $N(t)(a - bN(t)) = 0$ diperoleh nilai $N(t)$ yang memenuhi adalah $N(t) = 0$ dan $N(t) = a/b$. Populasi nol pasti menjadi titik ekuilibrium tetapi $N(t) = \frac{a}{b}$, merupakan populasi terbesar di mana lingkungan masih mendukung populasi danpa adanya kehilangan individu dalam populasi (kematian individu). Nilai ini disebut *carrying capacity* dari lingkungan (habitat). Teori

ini memprediksi bahwa populasi $N = a/b$ berkaitan dengan *zero population growth*.

Pada solusi persamaan logistik (2.3) apabila diketahui nilai awal $N(0) = N_0$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(a - bN(t)) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{N(t)(a-bN(t))} = dt \quad (2.4)$$

Dengan metode integral fungsi rasional dalam kalkulus persamaan (2.4) menjadi

$$\frac{1}{N(a-bN)} = \frac{\frac{1}{a}}{N} + \frac{\frac{b}{a}}{a-bN}. \quad (2.5)$$

persamaan (2.5) disubstitusikan ke persamaan diferensial (2.4) diperoleh

$$\frac{dN}{N(a-bN)} = dt \Leftrightarrow \frac{1}{N} dN + \frac{\frac{b}{a}}{a-bN} dN = dt \quad (2.6)$$

Selanjutnya dengan melakukan pengintegralan kedua ruas diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{\frac{b}{a}}{a-bN} dN &= \int dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} \int \frac{1}{N} dN + \frac{b}{a} \left(-\frac{1}{b}\right) \int \frac{a}{a-bN} d(a-bN) &= \int dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} \ln|N| - \frac{1}{a} \ln|a-bN| &= t + c. \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan kondisi awal $N(0) = N_0$ diperoleh

$$\frac{1}{a} \ln|N_0| - \frac{1}{a} \ln|a-bN_0| = c$$

sehingga

$$\frac{1}{a} \ln|N| - \frac{1}{a} \ln|a - bN| = t + \frac{1}{a} \ln|N_0| - \frac{1}{a} \ln|a - bN_0|,$$

karena N dan N_0 positif maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \ln \frac{N}{N_0} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a-bN_0}{a-bN} \right| &= t \\ \Leftrightarrow \frac{N}{N_0} \left| \frac{a-bN_0}{a-bN} \right| &= e^{at}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Karena $a - bN_0$ dan $a - bN$ mempunyai tanda yang sama maka

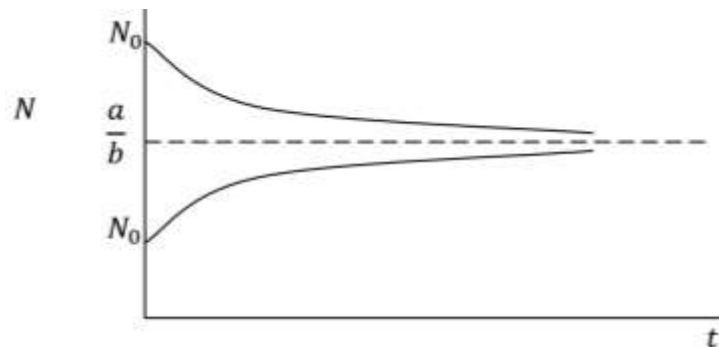
persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_0} \left(\frac{a-bN_0}{a-bN} \right) &= e^{at} \\ \Leftrightarrow N(a - bN_0) &= (a - bN)N_0 e^{at} \\ \Leftrightarrow N &= \frac{aN_0 e^{at}}{a - bN_0 + bN_0 e^{at}} \end{aligned}$$

atau

$$N = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{1 + \left(\frac{a-bN_0}{bN_0}\right)e^{-at}}. \quad (2.9)$$

untuk nilai $t \rightarrow \infty$ diperoleh nilai $N \rightarrow \frac{a}{b}$ yang merupakan *carrying capacity* dari lingkungan tersebut. Berikut ini grafik simulasi model pertumbuhan logistik,



Gambar 2. 1 Grafik $N(t)$ Model Logistik

(Haberman, 1977).

2.3 Model Populasi Epidemik

Model epidemi merupakan salah satu bentuk model matematika yang memodelkan suatu epidemi dalam populasi tertutup. Hal dasar dalam model epidemi adalah jika suatu penyakit menjangkiti satu individu dalam suatu populasi, maka

- a. hal tersebut menyebabkan epidemi
- b. jika menyebabkan epidemi, maka dapat diketahui dengan kecepatan berapa banyaknya individu yang terinfeksi bertambah
- c. sehingga dapat diprediksi populasi akan terinfeksi seluruhnya atau tidak

(Diekmann, 2000).

Model epidemiologi SI membagi total populasi menjadi dua sub populasi yaitu *susceptible*, dan *infected*. Perbedaannya dengan model SIR ada pada sub populasi *Recovery*, yaitu populasi individu-individu yang telah sembuh dari infeksi penyakit (Brauer & Chavez, 2012).

2.4 Model Populasi Predator-prey

Laju populasi prey dengan tidak adanya predator tumbuh cepat mendekati eksponensial dan tak terbatas dalam bentuk sebagai berikut,

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r, \quad (2.10)$$

dengan

$N(t)$: kepadatan spesies prey pada waktu t .

r : koefisien laju pertumbuhan intrinsik spesies prey.

Laju populasi prey menjadi fungsi logistik karena sumber daya alam yang terbatas, yang kemudian dapat menulisnya sebagaimana persamaan logistik sebelumnya yaitu sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (2.11)$$

dengan proporsi dan banyaknya individu dalam populasi yang belum digunakan $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ dan K (*carrying capacity*). Populasi pada tingkat K kadang juga disebut tingkat kejenuhan, karena untuk populasi besar lebih banyak kematian daripada kelahiran.

Carrying capacity atau daya dukung adalah jumlah maksimum individu yang dapat didukung atau dilayani oleh sumber daya yang ada didalam suatu ekosistem. Dengan kata lain, *carrying capacity* dapat disebut juga sebagai

kemampuan lingkungan (ekosistem) dalam mendukung kehidupan semua makhluk yang ada di dalamnya secara berkelanjutan.

Carrying capacity dalam pemodelan matematika berhubungan erat dengan ketersediaan tanaman sebagai makanan *prey*. Kemudian ditunjukkan suatu persamaan di mana *prey* dan *predator* akan saling berinteraksi yaitu sebagai berikut,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\beta N(t)P(t),$$

(2.12)

dengan β adalah laju penangkapan *prey* oleh *predator* dan $P(t)$ adalah populasi spesies *predator*. Dalam hal ini *prey* berinteraksi dengan *predator*. Dari beberapa penjelasan di atas maka dapat dibentuk model pertumbuhan populasi *prey* adalah sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \acute{\alpha}N(t)P(t). \quad (2.13)$$

dalam hal ini diasumsikan $K, \acute{\alpha}, r > 0$.

Pada persamaan di atas bersifat mengurangi jumlah populasi *prey*. Karena dalam hubungannya *prey* akan berinteraksi dengan *predator*. Akan tetapi sebaliknya pada model pertumbuhan *predator* maka respon ini akan bersifat menambah jumlah *predator* (Timuneno *et al.*, 2008).

2.5 Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan makanan. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon Holling tipe I, tipe II dan tipe III.

1. Holling tipe I

Fungsi respon holling tipe I merupakan hubungan dengan tingkat konsumsi. Tingkat konsumsi *predator* meningkat linear dengan kepadatan *prey*, tetapi akan konstan ketika *predator* berhenti memangsa. Peningkatan linear mengasumsikan bahwa waktu yang dibutuhkan oleh konsumen untuk memproses pokok makanan diabaikan, atau bahwa mengkonsumsi makanan tidak mengganggu pencarian makanan. Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada *predator* yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu *prey*-nya, sebagai contoh *predator*-nya adalah laba-laba. Fungsi respon holling tipe I adalah fungsi respons pertama yang dijelaskan dan juga yang paling sederhana dari tiga fungsi respon yang ada saat ini. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model fungsi respon Holling tipe I diberikan sebagai berikut:

$$F^{(I)}(x) = ax$$

di mana

$F^{(I)}$: fungsi Holling tipe I

a : tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey*

x : jumlah populasi mangsa

(Boyce & DiPrima, 2001).

Contoh 2.1

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= aH - bHP, \\ \frac{dP}{dt} &= -dP + cHP,\end{aligned}\tag{2.14}$$

dengan

$H(t)$: kepadatan populasi *prey* pada waktu t ($H(t) > 0$).

$P(t)$: kepadatan populasi *predator* pada waktu t ($P(t) > 0$).

a : koefisien laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey* ($a > 0$).

b : angka penurunan kepadatan populasi *prey* karena terjadinya interaksi antara *prey* dan *predator* ($b > 0$).

d : koefisien laju kematian alami *predator*, ($d > 0$).

c : angka pertumbuhan kepadatan populasi *predator* karena terjadinya interaksi antara *prey* dan *predator* ($c > 0$).

Sistem (2.14) memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu $T_0(0,0)$ dan

$T_1\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ dengan matriks Jacobian $J = \begin{pmatrix} a - bP & -bH \\ cP & -d + cH \end{pmatrix}$. Dari matriks

Jacobian sistem (2.14) yang dihitung pada setiap titik kesetimbangan menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = a$ dan $\lambda_2 = -d$ untuk $T_0(0,0)$ serta

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$ untuk $T_1\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

2. Holling tipe II

Pada model Holling tipe II, terlihat bahwa rata-rata tingkat konsumsi dari *predator*, ketika *predator* menghabiskan waktu untuk mencari *prey*. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* yang

berkarakteristik aktif dalam mencari *prey*, sebagai contoh *predator*-nya adalah serigala. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik kejenuhan (*half saturation*). Hal ini disebabkan setiap pemangsa hanya dapat memakan sejumlah mangsa pada saat satu satuan waktu. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model Holling tipe II diberikan sebagai berikut:

$$F^{(II)}(x) = \frac{ax}{1+bx}$$

di mana

$F^{(II)}$: fungsi Holling tipe II

a : tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey*

b : waktu pencarian *prey*

x : jumlah populasi mangsa

(Skalski & Gilliam, 2001).

Contoh 2.2

Diberikan sistem persamaan diferensial yang tergantung pada satu parameter.

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x) - \frac{2xy}{1+2x} \\ y' &= y\left(\frac{2x}{1+2x} - i\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan

x : kepadatan populasi *prey* ($x > 0$).

y : kepadatan populasi *predator* ($y > 0$).

i : laju kematian alami *predator* ($i > 0$).

Sistem (2.15) memiliki tiga titik ekuilibrium, yaitu $T_0(0,0)$, $T_1(1,0)$ dan $T_2\left(\frac{i}{2(1-i)}, \frac{2-3i}{4(1-i)^2}\right)$ untuk semua i dengan matriks Jacobian $J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{2y}{(1+2x)^2} & -\frac{2x}{1+2x} \\ \frac{2y}{(1+2x)^2} & \frac{2x}{1+2x} - i \end{pmatrix}$. Dari matriks Jacobian sistem (2.13) yang dihitung pada setiap titik kesetimbangan menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -i$ untuk $T_0(0,0)$, $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = \frac{2}{3} - i$ untuk $T_1(1,0)$ serta $\lambda_{1,2} = \frac{i(1-3i)}{4(1-i)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{i(1-3i)}{2(1-i)}\right)^2 - 4i\left(\frac{2-3i}{2}\right)}$ untuk $T_2\left(\frac{i}{2(1-i)}, \frac{2-3i}{4(1-i)^2}\right)$. Karena terdapat nilai eigen yang dihasilkan bernilai positif, maka pada titik ekuilibrium T_0 merupakan simpul tak stabil. Semua trayektori akan menuju ke takhingga. Selanjutnya titik ekuilibrium T_1 merupakan simpul stabil ketika $i < \frac{2}{3}$.

3. Model Holling tipe III

Model Holling tipe III juga menggambarkan tingkat pertumbuhan pemangsa. Tetapi pada model ini dapat terlihat mengenai penurunan tingkat pemangsaan pada saat kepadatan mangsa rendah. Hal tersebut tidak dapat terlihat pada model Holling tipe II. Fungsi respon Holling tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. Karena *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain, maka tingkat pertemuan antara *predator* dan *prey* adalah dua. Hal inilah yang menyebabkan variabel populasi *prey* menjadi N^2 , sehingga laju populasi

menjadi lebih cepat. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model Holling tipe III diberikan sebagai berikut:

$$F^{(III)}(x) = \frac{ax^2}{1+bx^2}$$

di mana

$F^{(III)}$: fungsi Holling tipe III

a : tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey*

b : tingkat kejenuhan pemangsaan

x : jumlah populasi mangsa

(Ndam & Kaseem, 2009).

Contoh 2.3

Diberikan sistem persamaan diferensial yang tergantung pada satu parameter.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{ax^2y}{m^2+x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{bx^2y}{m^2+x^2} - (\alpha + q)y, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dengan

x : kepadatan populasi *prey* ($x > 0$).

y : kepadatan populasi *predator* ($y > 0$).

a : angka penurunan kepadatan populasi *prey* karena terjadinya interaksi antara *prey* dan *predator* ($a > 0$).

b : angka pertumbuhan kepadatan populasi *predator* karena terjadinya interaksi antara *prey* dan *predator* ($b > 0$).

m : tingkat kejenuhan pemangsaan ($m > 0$).

q : koefisien laju pemanenan *prey* ($q > 0$).

α : koefisien laju kematian alami *predator* ($\alpha > 0$).

Sistem (2.16) memiliki tiga titik ekuilibrium, yaitu

$$E_0(0,0), E_1(1,0) \text{ dan } E_2 \left(m \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}, m \frac{\left(1-m \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}\right) \left(1+\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}\right)}{a \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}} \right) \text{ untuk}$$

semua α dengan matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{2am^2xy}{(m^2+x^2)^2} & -\frac{ax^2}{m^2+x^2} \\ \frac{2bm^2xy}{(m^2+x^2)^2} & \frac{bx^2}{m^2+x^2} - \alpha - q \end{pmatrix}.$$

dari matriks Jacobian sistem (2.16) yang dihitung pada setiap titik kesetimbangan menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -\alpha - q =$

$-(\alpha + q)$ untuk $E_0(0,0)$, $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = \frac{b}{m^2+1} - \alpha - q$ untuk $E_1(1,0)$

serta $\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$, dengan $p_1 = 2(m\sqrt{A} - 1) \left(1 - \frac{1}{1+A}\right) + 1$,

$p_2 = \frac{2bA(1-m\sqrt{A})}{(1+A)^2}$ dan $A = \frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}$ untuk

$$E_2 \left(m \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}, m \frac{\left(1-m \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}\right) \left(1+\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}\right)}{a \sqrt{\frac{\alpha+q}{b-(\alpha+q)}}} \right).$$

Diperoleh titik E_0 selalu tidak stabil. Titik E_1 stabil ketika $\frac{b}{m^2+1} <$

$\alpha + q$. Titik E_2 stabil ketika $p_1 > 0$ dan $p_1 > \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$.

2.6 Sistem Dinamik

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan diferensial di mana dalam persamaannya mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium merupakan salah satu kunci konsep dalam sistem dinamik. Sistem yang lebih umum dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\&\vdots \\x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{2.17}$$

dengan $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah suatu fungsi umum dari x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ dan waktu t . Sistem tersebut dapat disederhanakan lagi menjadi sistem fungsi yang tak bergantung dengan waktu (sistem autonomus) seperti bentuk berikut.

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\x_2' &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x_n' &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.18}$$

dengan f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ adalah fungsi yang tak tergantung secara eksplisit dari waktu t . Kemudian sistem tersebut dianalisis dengan memikirkan konsep

tentang ekuilibrium. Ekuilibrium akan terjadi apabila tidak ada gerakan dalam sistem tersebut, artinya $x'_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Titik ekuilibrium akan memenuhi

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

karena $x'_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Berikut definisi titik ekuilibrium dari sistem (2.18).

Definisi 2.1 (Titik Ekuilibrium):

Titik $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in R^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem (2.18) jika $f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(Perko, 1991)

Definisi 2.2 (Kestabilan Lokal):

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ pada sistem (2.18) dikatakan

1. stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
2. Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat $a_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < a_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
3. Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi 1.

(Wiggins, 1990).

Definisi 2.3 (Kestabilan Asimtotik Global):

Jika untuk sembarang titik awal $x(t_0)$, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ dan untuk $t \rightarrow \infty$ setiap solusi sistem $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ dikatakan stabil asimtotik global (Wiggins,1990).

Di bawah ini diberikan definisi dari sistem linear dan non linear. Diberikan sistem (2.18), dengan $E \subseteq R^n$ dan $f: E \rightarrow R^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (2.18) dikatakan linear jika f_1, f_2, \dots, f_n masing-masing linear terhadap x_1, x_2, \dots, x_n . Jadi sistem (2.18) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, f_i kontinu pada $a \leq t \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. selanjutnya sistem (2.18) dapat dinyatakan dalam bentuk $x' = Ax$, dengan $x \in E$, $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ dan A matriks berukuran $n \times n$.

Diberikan sistem (2.18) dengan $E \subseteq R^n$ dan $f: E \rightarrow R^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (2.18) dikatakan nonlinear jika terdapat i sedemikian hingga f_i tidak linear. Sifat dari solusi disekitar titik ekuilibrium sistem nonlinear (2.18) dapat ditentukan melalui linearisasi di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut.

Definisi 2.4 (Matriks Jacobi)

Apabila dipunyai fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.18) dengan $f_i \in C(E), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks

$$Jf(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bar{x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \bar{x} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \bar{x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bar{x} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \bar{x} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \bar{x} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \bar{x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \bar{x} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \bar{x} \end{vmatrix}$$

dinamakan matriks jacobian dari f di titik \bar{x} . (Kocak, 1991)

Dengan menggunakan matrik Jacobian $Jf(\bar{x})$, sifat kestabilan titik ekuilibrium \bar{x} dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik.

Definisi 2.5 (Titik Hiperbolik):

Titik ekuilibrium dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen matriks jacobi $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol (Perko, 1991).

2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara formal definisi nilai eigen dan vektor eigen adalah sebagai berikut.

Definisi 2.6

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $x \in R^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor eigen / vektor karakteristik dari A jika

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu $\lambda \in R$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai eigen / nilai karakteristik. Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ

Untuk mencari nilai dan vektor eigen dari suatu matrik A berordo $n \times n$ adalah sebagai berikut:

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $v \in R^n, v \neq 0$ merupakan vektor eigen dari matrik A , maka ada $\lambda \in R \ni$

$$Av = \lambda v.$$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda Iv$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)v = 0$$

Tampak bahwa v merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear (SPL) homogen $(\lambda I - A)x = 0$. Karena $v \neq 0$, maka sistem persamaan homogen $(\lambda I - A)v = 0$ mempunyai penyelesaian non trivial. Ini hanya mungkin jika $\det(\lambda I - A) = 0$, artinya λ adalah penyelesaian persamaan dari

$\det (\lambda I - A) = 0$. $\det (\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik dari matrik A .

Lemma: λ

Misalkan A matriks $n \times n$. $\lambda \in R$ adalah nilai eigen dari matriks A jika dan hanya jika λ adalah akar persamaan karakteristik $\det (\lambda I - A) = 0$. Sedangkan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ adalah penyelesaian dari SPL homogen $(\lambda I - A) = 0$.

(Anton & Rorres, 2014)

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Untuk menguji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Sebagai alternatif untuk menentukan nilai eigen tersebut digunakan kriteria Routh-Hurwitz yaitu,

Jika pembuat nol pada persamaan

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.21)$$

mempunyai bagian real negatif, maka

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \quad (2.22)$$

(Hahn, 1967).

Definisi 2.7

Diberikan polinomial (2.21), dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks Hurwitz untuk persamaan (2.21) didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang berbentuk sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Determinan Hurwitz tingkat ke- k , dinotasikan dengan Δ_k ; $k = 1, 2, \dots, n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.23), didefinisikan sebagai berikut.

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

(Liao *et al.*, 2007).

Berikut ini teorema yang menjamin pembuat nol Polinomial (2.21) mempunyai bagian real negatif.

Teorema 2.1

Pembuat nol dari Polinomial (2.21) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan (2.22) dipenuhi dan

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (2.24)$$

(Liao *et al.*, 2007).

Contoh:

Diberikan polinomial berderajat 3 : $k_0\hat{\omega}^3 + k_1\hat{\omega}^2 + k_2\hat{\omega} + k_3 = 0$. Matriks

$$\text{Hurwitz dari polinomial tersebut adalah } H = \begin{bmatrix} k_1 & k_0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks H diperoleh

$$\Delta_1 = |k_1| = k_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_1 & k_0 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix} = k_1k_2 - k_0k_3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k_1 & k_0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix} = k_3(k_1k_2 - k_0k_3)$$

Agar semua akar polinomial tersebut mempunyai bagian real negatif maka harus memenuhi:

$$\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow k_1 > 0$$

$$\Delta_2 > 0 \Leftrightarrow k_1k_2 - k_0k_3 > 0$$

$$\Delta_3 > 0 \Leftrightarrow k_3(k_1k_2 - k_0k_3) > 0$$

$$\frac{k_1}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_0 > 0$$

$$\frac{k_2}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_2 > 0$$

$$\frac{k_3}{k_0} > 0 \Leftrightarrow k_3 > 0$$

Jadi semua akar polinomial $k_0\hat{\omega}^3 + k_1\hat{\omega}^2 + k_2\hat{\omega} + k_3 = 0$ mempunyai bagian real negatif apabila

1. $k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$ dan $k_3 > 0$
2. $k_1k_2 - k_0k_3 > 0$.

(Kharis, 2012)

2.9 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Perhatikan sistem linear

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dengan } a, b, c, \text{ dan } d \text{ konstan} \quad (2.25)$$

Catatan:

Sistem linear (2.25), biasa disebut “model data species” dalam *population dynamics*.

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan misalkan λ nilai eigen A , maka

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

$$= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ di mana } \begin{cases} p = a + d \\ q = ad - bc \end{cases}$$

Stabilitas sistem linear (2.25) dapat diterangkan sebagai berikut.

- 1) $\lambda_{1,2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$:
 - a. $\lambda_{1,2}$ sama tanda jika $q > 0$:
 - i. $\lambda_{1,2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. $\lambda_{1,2}$ semua negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $\lambda_{1,2}$ beda tanda jika $q < 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - c. Salah satu dari $\lambda_{1,2}$ nol, jika $q = 0$:
 - i. Akar lainnya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. Akar lainnya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
- 2) $\lambda_{1,2}$ real dan sama bila $\Delta = 0$:
 - a. $\lambda_{1,2}$ sama tanda:
 - i. Keduanya positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. Keduanya negatif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p = 0 \rightarrow$ tidak stabil.
- 3) $\lambda_{1,2}$ kompleks bila $\Delta < 0$:
 - a. $R_e(\lambda_{1,2})$ sama tanda:
 - i. $R_e(\lambda_{1,2})$ semua positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.
 - ii. $R_e(\lambda_{1,2})$ semua positif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.
 - b. $R_e(\lambda_{1,2})$ bila $p = 0 \rightarrow$ stabil netral.

(Boyce & DiPrima, 2001).

2.10 Potret Fase dari Sistem Linear

Dipunyai sistem linear sebagai berikut.

$$\dot{X} = AX \quad (2.26)$$

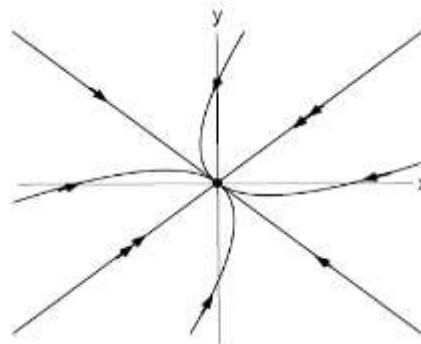
Misalkan $\det(A) \neq 0$, maka λ adalah nilai eigen dari matriks A , yaitu, λ merupakan akar persamaan karakteristik

$$\lambda I - A = 0. \quad (2.27)$$

Potret fase dari sistem (2.26) hampir seluruhnya tergantung pada nilai-nilai eigennya

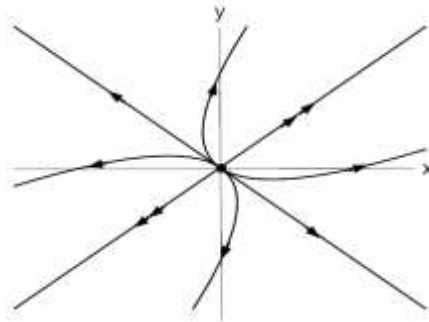
- (1) Jika nilai-nilai eigennya real negatif berbeda ini disebut *node*: semua trayektori menuju ke tak nol yang berarti titik kritik nol adalah stabil.

Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.2.



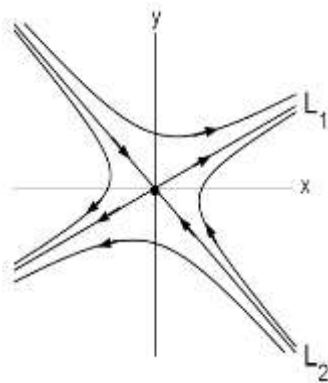
Gambar 2. 2 Trayektori untuk *Node Point*

- (2) Jika nilai-nilai eigennya real positif berbeda, dengan ini disebut *nodal source*: semua trayektori keluar dari titik kritiknya menjadi tak stabil. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2. 3 Trayektori untuk titik *Nodal Source*

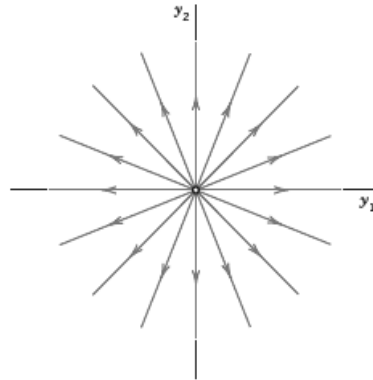
- (3) Jika nilai-nilai eigennya real berbeda berlawanan tanda, dengan ini disebut *saddle point*: semua trayektori akan menjauhi ke tak hingga sepanjang vektor eigen, ini mengakibatkan titik kritik akan selalu tak stabil. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2. 4 Trayektori untuk *Saddle Point*

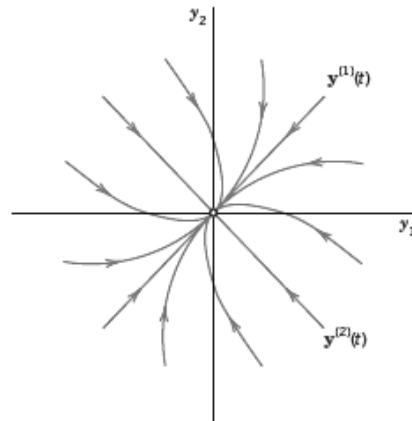
- (4) Jika nilai-nilai eigennya sama, dengan dua vektor eigen yang bebas linear, maka akan diperoleh apa yang dinamakan *star point* atau

proper node: bila $\lambda < 0$ maka titik kritisnya akan stabil dan tak stabil untuk $\lambda > 0$. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.5.

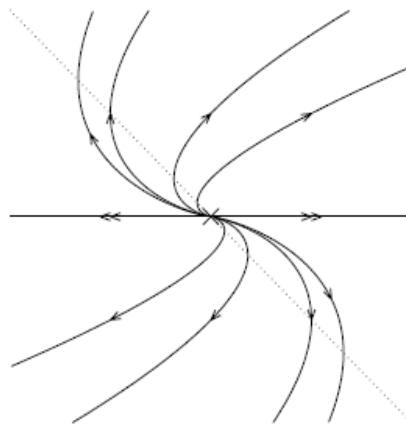


Gambar 2. 5 Trayektori untuk *Star Point*

- (5) Jika nilai-nilai eigennya sama, dengan satu vektor eigen, maka akan diperoleh apa yang dinamakan *improper node*: bila $\lambda < 0$ maka titik kritisnya akan stabil dan arah trayektorinya akan menuju ke titik nol, sedangkan untuk $\lambda > 0$ arah trayektorinya akan keluar meninggalkan titik nol dan titik kritisnya akan tak stabil. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.6 dan 2.7.

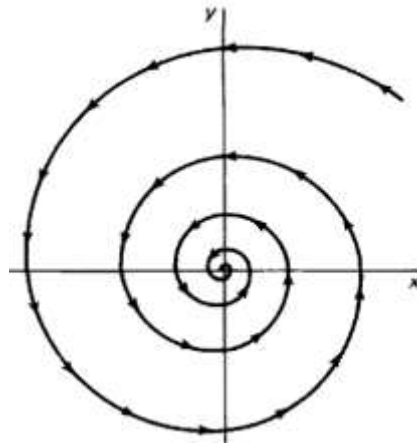


Gambar 2. 6 Trayektori untuk *Improper Node* dengan $\lambda < 0$



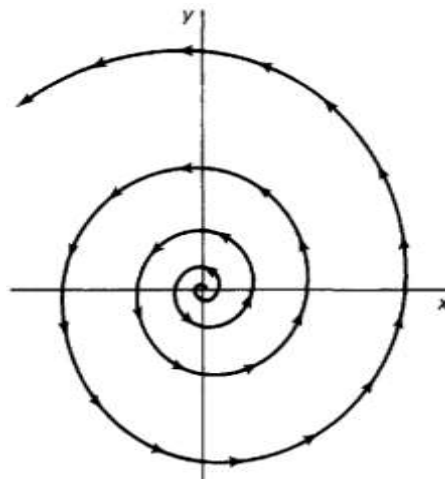
Gambar 2. 7 Trayektori untuk *Improper Node* dengan $\lambda > 0$

- (6) Jika nilai-nilai eigennya merupakan bilangan kompleks $\lambda_{\pm} = a \pm ib$ dengan $a < 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang disebut *stabel spiral*: semua trayektori akan menuju titik nol dan titik kritiknya akan stabil. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.8.



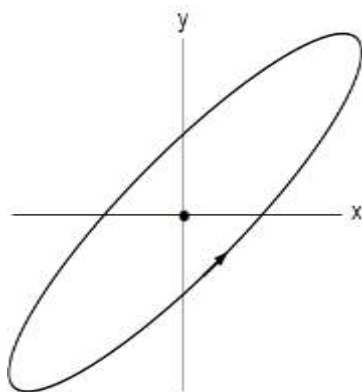
Gambar 2. 8 Trayektori untuk *Stabel Spiral*

- (7) Jika nilai-nilai eigennya merupakan bilangan kompleks $\lambda = a \pm ib$ dengan $a > 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang disebut *unstable spiral*: semua trayektori akan keluar meninggalkan titik nol dan titik kritiknya akan tak stabil. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2. 9 Trayektori untuk *Unstable Spiral*

- (8) Jika nilai eigennya imajiner murni, dalam kasus ini nilai eigennya dapat dinyatakan sebagai $i\lambda_{\pm} = \pm iw$ dalam hal ini solusi merupakan osilator stabil secara alami. Titik kritik dalam hal ini disebut *Center Point*. Trayektorinya berupa elips. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.10.



Gambar 2. 10 Trayektori untuk *Center Point*

(Boyce & DiPrima, 2001).

BAB 3

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu

1. Perumusan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan sehingga mempermudah pembahasan selanjutnya.

2. Studi Pustaka

Dalam studi pustaka ini digunakan sumber pustaka yang relevan yang digunakan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan dalam penelitian. Studi pustaka dengan mengumpulkan sumber pustaka yang dapat berupa buku, teks, makalah dan sebagainya. Setelah sumber pustaka terkumpul dilanjutkan dengan penelaahan dari sumber pustaka tersebut. Pada akhirnya sumber pustaka itu dijadikan landasan untuk menganalisis permasalahan.

3. Pemodelan matematika

Pemodelan matematika *predator-prey* dalam penelitian ini diperlukan untuk mengetahui bagaimana bentuk persamaannya, kemudian untuk dicari bentuk penyelesaian model predator prey tersebut.

4. Pemecahan Masalah

Langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis bentuk dan model penelitian adalah sebagai berikut:

- a. Menurunkan model matematika S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II.
- b. Analisis terhadap model dimulai dengan mencari titik kesetimbangan dari model sistem persamaan diferensial.
- c. Menentukan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem yang dihitung pada setiap titik kesetimbangan.
- d. kemudian memeriksa kestabilan titik kesetimbangan tersebut.
- e. Membuat simulasi numerik dari hasil-hasil analisis model matematika S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II untuk memberikan gambaran geometris dari hasil analisis tersebut.

5. Penarikan kesimpulan

Langkah terakhir dalam metode penelitian adalah penarikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil langkah pemecahan masalah.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Simpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

- (4) Berdasarkan penondimensialan model, diperoleh model matematika S-I-P pada sistem interaksi dua spesies *predator-prey* dan Fungsi Respon Holling Tipe II sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{dx}{dt} &= (x - x^2) - mxy, \\ \text{(b)} \quad \frac{dy}{dt} &= y(1 - x - y) + mxy - \frac{Ayz}{B+y} - Cy, \\ \text{(c)} \quad \frac{dz}{dt} &= \mu \left(\frac{Ayz}{B+y} \right) - Dz. \end{aligned} \tag{5.1}$$

dengan $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, dan $z(0) > 0$.

- (5) Dari analisa model matematika yang dalam hal ini sistem persamaan (5.1) yang dianalisa diperoleh

Teorema 4.1

Dari sistem persamaan (4.13) diperoleh

- (a) Tanpa adanya syarat, sistem persamaan (4.13) hanya mempunyai 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium $E_0(0,0,0)$ dan $E_1(1,0,0)$.

- (b) Jika $C < 1$ sistem persamaan (4.13) hanya mempunyai 3 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$ dan $E_2(0, y_1, 0)$.
- (c) Jika $C < 1$ dan $m(1 - C) < 1 < 1 + C < m$, maka sistem persamaan (4.13) hanya mempunyai 4 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$, $E_2(0, y_1, 0)$ dan $E_3(x_2, y_2, 0)$.
- (d) Jika $C < 1$, $\mu A > D$ dan $(1 - C)(\mu A - D) > BD$, maka sistem persamaan (4.13) hanya mempunyai 4 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$, $E_2(0, y_1, 0)$ dan $E_4(0, y^*, z_1^*)$.
- (e) Jika $C < 1$, $\mu A > D$, $mBD < \mu A - D$ dan $[m - C - 1](\mu A - D) > [(m - 1)^2 BD]$ maka sistem persamaan (4.13) hanya mempunyai 4 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium $E_0(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$, $E_2(0, y_1, 0)$ dan $E_5(x^*, y^*, z_2^*)$.

Teorema 4.2

Misalkan E_0 dan E_1 adalah titik ekuilibrium sistem (4.13)

- (3) Tanpa adanya syarat titik ekuilibrium E_0 merupakan titik pelana tidak stabil.
- (4) Titik ekuilibrium E_1 merupakan titik pelana tak stabil dengan syarat $m > C + 1$ dan merupakan titik simpul stabil dengan syarat $m < C + 1$.

Teorema 4.3

Misalkan $C < 1$, $\mu A > D$, $m(1 - C) < 1 < 1 + C < m$ dan $(1 - C)(\mu A - D) > BD$ dipenuhi serta E_2 , dan E_3 adalah titik ekuilibrium sistem (4.13)

- (3) Titik ekuilibrium E_2 merupakan simpul tidak stabil.
- (4) Titik ekuilibrium E_3 merupakan simpul stabil ketika $1 + \sqrt{2} < m$ dan $(\mu A - D)(m - 1 - C) > BD(m - 1)^2$.

Teorema 4.4

Misalkan $C < 1$, $\mu A > D$ dan $(1 - C)(\mu A - D) > BD$ dipenuhi serta E_4 adalah titik ekuilibrium sistem (4.13). Titik ekuilibrium E_4 merupakan titik simpul stabil ketika $D < 1$, $B + C > 1$ dan $\mu A - D < mBD$.

Teorema 4.5

Misalkan kondisi $\mu A > D$, $mBD < \mu A - D$ dan $(\mu A - D)(m - 1 - C) > BD(m - 1)^2$ dipenuhi dan E_5 merupakan titik ekuilibrium sistem (4.13), maka titik ekuilibrium E_5 merupakan titik simpul stabil ketika $(m - C - 1)(\mu A - D) < \mu AB$, $m > 2$ dan $\mu B < 1$.

- (6) Simulasi model dan potret fase yang menggunakan *software* Maple 12 memberikan hasil yang sama dengan hasil analisis.

5.2 Saran

Pada penelitian ini analisis titik ekuilibrium E_3 , E_4 dan E_5 hanya terbatas pada kondisi di mana titik bersifat stabil menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Jika pembaca tertarik bisa melakukan analisis kondisi ketidakstabilan titik-titik kritik tersebut. Pembaca juga bisa melakukan analisis kemungkinan terjadinya bifurkasi pada sistem ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. & C. Rorres. 2014. *Elementary Linear Algebra*. Wiley: Canada.
- Boyce, W.E. & DiPrima R.C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition, John Wiley & Sons: New York.
- Brauer, F. & C.C. Chaves. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer Science & Business Media: New York.
- Chattopadhyay, J. & O. Arino. 1999. A predator-prey model with disease in the prey. *Nonlinear Analysis*, 36: 747-766.
- Das, K.P., S. Chatterjee, & J. Chattopadhyay. 2009. Disease in prey population and body size of intermediate predator reduce the prevalence of chaos-conclusion drawn from Hastings–Powell model. *Ecol.Complex.*, 6 (3): 363–374.
- Diekmann, J.A.P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Du, N. H., N. M. Man & T. T. Trung. 2007. Dynamics Of Predator-Prey Population With Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Acta Mathematica Vietnamica*, 32(1): 99-111.
- Guerrant, R.L., Walker, D.H., & Weller, P.F., 2011, *Tropical Infectious Diseases: Principles, Pathogens and Practice, Edisi Ketiga*, Saunders Elseviers, China.
- Haberman, R. 1977. *Mathematical Model in Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. Prentice-Hall: New Jersey.
- Hanh, W., 1967, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York.
- Hale, J. K. & H. Kocak. 1991. *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer Verlag.
- Jorgensen, S.E. 2009. *Ecosystem Ecology*. First edition: Elsevier, Italy.
- Joydif, D. & A.K. Sharma, *The Role Of The Incubation Period In A Disease Model*, Applied Mathematics E-Notes, 9: 146-153, 2009
- Kharis, M. 2012. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika UNNES.

- Kooi, B.W., G.A.K. VanVoorn, & K.p. Das. 2011. Stabilization and Complex Dynamics in Predator-Prey Model with Predator Suffering from an Infectious Disease. *Ecological Complexity*, 8: 113-122.
- Liao, X., L. Wang & P. Yu. 2007. *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier: Netherlands.
- Ludwig, D., D. Jones & C.S. Holling. 1978. Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest. *Journal of Animal Ecology*, 47: 315-332.
- Ndam, J.N. & Kaseem T.G. 2009. A Mathematical Model for the Dynamics of Predator-Prey Interaction in A Three-Trophic Level Food Web. *Continental J. Applied Science*, 4, hal. 32-43.
- Pastor, J. 2008. *Mathematical Ecology of Population and Ecosystem*. John Willey & Son: Singapore.
- Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. Springer-Verlag: New York.
- Rosenzweig, M.L. & R.H. MacArthur. 1963. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *Am.Nat.*, 97: 209-223.
- Skalski, G.T. & J.F. Gilliam. 2001. Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology*, 82: 3083-3092.
- Timuneno, Henry. M., R. H. S. Utomo & Widowati. 2008. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda. *Jurnal Matematika*, 11(1): 43-51.
- Waluya, S.T B. 2011. *An Introduction to Differential Equations*. Unnes Press: Semarang.
- Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamic System and Chaos*. Springer-Verlag: New York.

LAMPIRAN

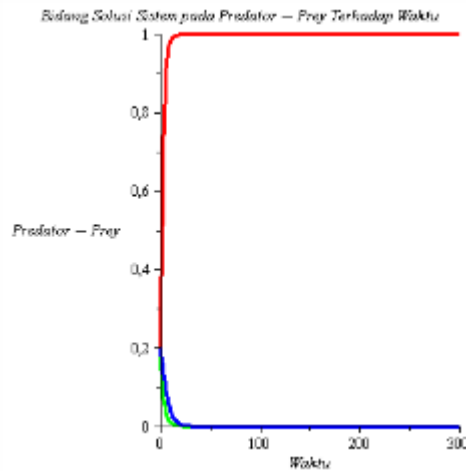
Lampiran 1

Print Out Hasil Simulasi menggunakan Software Maple 12**Titik Ekuilibrium E_0 dan E_1 Kasus 2**

```

> restart :
> with(DEtools) :
> with(plots) :
> m := 1.5; A := 1; B := 0.6; C1 := 0.7; C2 := 0.2; MU := 0.5;
      m := 1.5
      A := 1
      B := 0.6
      C1 := 0.7
      C2 := 0.2
      MU := 0.5
> PD1 := diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m*y(t));
      PD1 :=  $\frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 1.5 y(t))$ 
> PD2 := diff(y(t), t) = y(t) * (1 - 2*x(t) - y(t) + m*x(t) - (A
      *z(t))/(B + y(t)) - C1);
      PD2 :=  $\frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left( 0.3 - 0.5 x(t) - y(t) - \frac{z(t)}{0.6 + y(t)} \right)$ 
> PD3 := diff(z(t), t) = z(t) * ((MU*A*y(t))/(B + y(t)) - C2);
      PD3 :=  $\frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left( \frac{0.5 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right)$ 
>
display({phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0
..300, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], stepsize = 0.8, scene
= [t, x(t)], labels = ['Waktu', 'Predator - Prey'], linecolour
= [red]}), {phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t
= 0..300, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], style = POINT,
stepsize = 0.8, scene = [t, y(t)], labels = ['Waktu', 'Predator
- Prey'], linecolour = [green]}), {phaseportrait([PD1, PD2,
PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..300, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0)
= 0.2]], style = POINT, stepsize = 0.8, scene = [t, z(t)], labels = [
'Waktu', 'Predator - Prey'], title =
'Bidang Solusi Sistem pada Predator - Prey Terhadap Waktu',
linecolour = [blue]})}

```



> $m := 1.5; A := 1; B := 0.6; C1 := 0.7; C2 := 0.2; MU := 0.5;$

$m := 1.5$

$A := 1$

$B := 0.6$

$C1 := 0.7$

$C2 := 0.2$

$MU := 0.5$

>

>

$SYS := [diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m * y(t)), diff(y(t), t) = y(t) * (1 - 2 * x(t) - y(t) + m * x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1), diff(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2)];$

$$SYS := \left[\frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 1.5 y(t)), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.3 - 0.5 x(t) - y(t) - \frac{z(t)}{0.6 + y(t)} \right), \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.5 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right) \right]$$

>

>

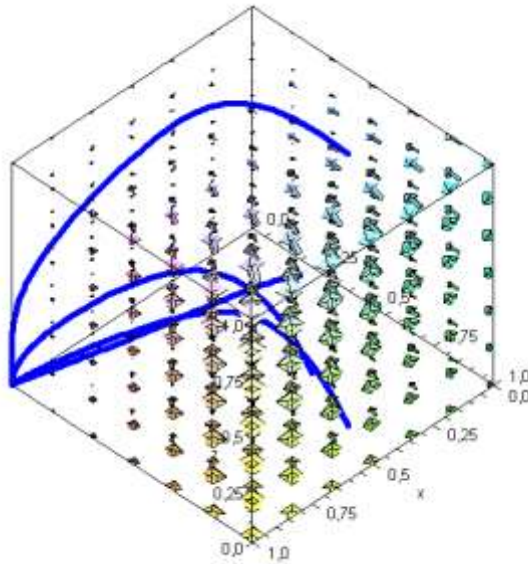
$IC := [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.55, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.5, y(0) = 0.9, z(0) = 0.1], [x(0) = 0.1, y(0) = 0.3, z(0) = 0.07]];$

$$IC := [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.55, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.5, y(0) = 0.9, z(0) = 0.1], [x(0) = 0.1, y(0) = 0.3, z(0) = 0.07]]$$

> $RHS := eval(map(rhs, SYS), [x(t) = x, y(t) = y, z(t) = z]);$

$$RHS := \left[x(1 - x - 1.5y), y \left(0.3 - 0.5x - y - \frac{z}{0.6 + y} \right), z \left(\frac{0.5y}{0.6 + y} - 0.2 \right) \right]$$

- > `with(plots) :`
- > `with(DEtools) :`
- > `p1 := fieldplot3d(RHS, x = 0..1, y = 0..1, z = 0..1, grid = [7, 7, 7], axes = boxed, arrows = '3-D') :`
- > `p2 := DEplot3d(SYS, [x(t), y(t), z(t)], t = 0..500, IC, stepsize = 0.2, linecolor = blue, axes = boxed) :`
- > `display(p1, p2, view = [0..1, 0..1, 0..1]) ;`



Titik Ekuilibrium E_1 Kasus 2 , E_2 dan E_3

- > `restart :`
- > `with(DEtools) :`
- > `with(plots) :`
- > `m := 2.21; A := 0.85; B := 0.6; C1 := 0.7; C2 := 0.2; MU := 0.5;`
 - `m := 2.21`
 - `A := 0.85`
 - `B := 0.6`
 - `C1 := 0.7`
 - `C2 := 0.2`
 - `MU := 0.5`
- >
- > `PD1 := diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m*y(t));`

$$PD1 := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 2.21y(t))$$

$$\text{> } PD2 := \text{diff}(y(t), t) = y(t) * (1 - 2 * x(t) - y(t) + m * x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1);$$

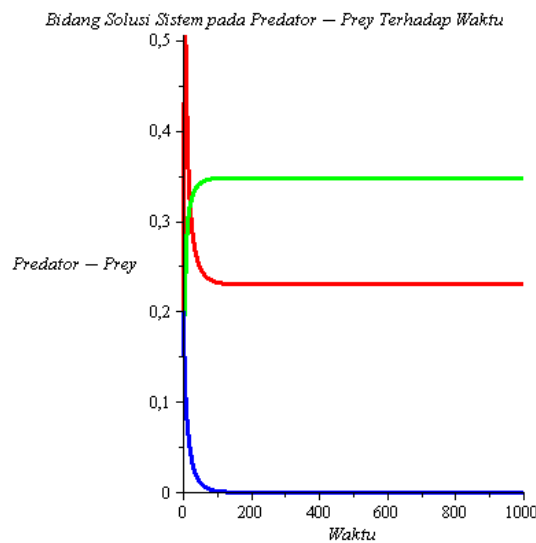
$$PD2 := \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.3 + 0.21 x(t) - y(t) - \frac{0.85 z(t)}{0.6 + y(t)} \right)$$

$$\text{> } PD3 := \text{diff}(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2);$$

$$PD3 := \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.425 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right)$$

>

```
display({phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0
..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], stepsize = 0.8, scene
= [t, x(t)], labels = ['Waktu', 'Predator - Prey'], linecolour
= [red]}), {phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t
= 0..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], style = POINT,
stepsize = 0.8, scene = [t, y(t)], labels = ['Waktu', 'Predator
- Prey'], linecolour = [green]}), {phaseportrait([PD1, PD2,
PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0)
= 0.2]], style = POINT, stepsize = 0.8, scene = [t, z(t)], labels = [
'Waktu', 'Predator - Prey'], title =
'Bidang Solusi Sistem pada Predator - Prey Terhadap Waktu',
linecolour = [blue]})});
```



$$\text{> } m := 2.21; A := 0.85; B := 0.6; C1 := 0.7; C2 := 0.2; MU := 0.5;$$

$$m := 2.21$$

$$A := 0.85$$

$$B := 0.6$$

$$C1 := 0.7$$

$$C2 := 0.2$$

$$MU := 0.5$$

>

> $SYS := [\text{diff}(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m * y(t)), \text{diff}(y(t), t) = y(t) * (1 - 2 * x(t) - y(t) + m * x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1), \text{diff}(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2)];$

$$SYS := \left[\frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 2.21 y(t)), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.3 + 0.21 x(t) - y(t) - \frac{0.85 z(t)}{0.6 + y(t)} \right), \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.425 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right) \right]$$

>

> $IC := [[x(0) = 0.4, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.7, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.7, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.8, y(0) = 0.6, z(0) = 0.3]];$

$$IC := [[x(0) = 0.4, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.7, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.7, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.8, y(0) = 0.6, z(0) = 0.3]]$$

> $RHS := \text{eval}(\text{map}(\text{rhs}, SYS), [x(t) = x, y(t) = y, z(t) = z]);$

$$RHS := \left[x (1 - x - 2.21 y), y \left(0.3 + 0.21 x - y - \frac{0.85 z}{0.6 + y} \right), z \left(\frac{0.425 y}{0.6 + y} - 0.2 \right) \right]$$

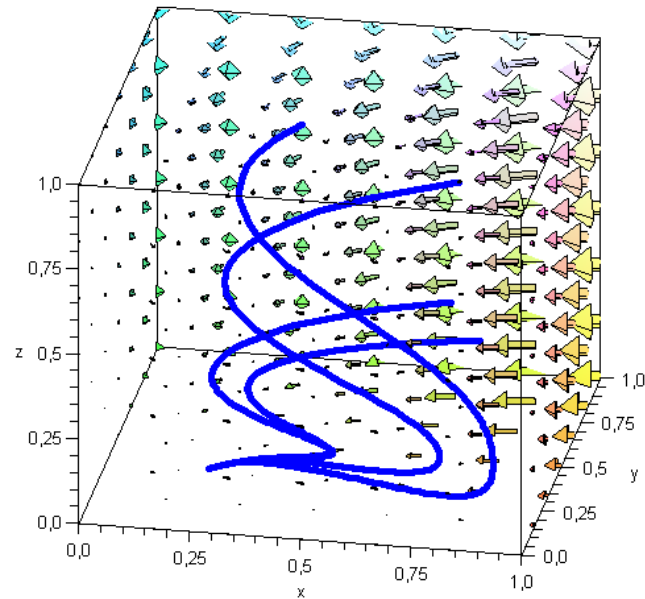
> $\text{with}(\text{plots}) :$

> $\text{with}(\text{DEtools}) :$

> $p1 := \text{fieldplot3d}(RHS, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, z = 0 .. 1, \text{grid} = [7, 7, 7], \text{axes} = \text{boxed}, \text{arrows} = \text{'3-D'}) :$

> $p2 := \text{DEplot3d}(SYS, [x(t), y(t), z(t)], t = 0 .. 500, IC, \text{stepsize} = 0.2, \text{linecolor} = \text{blue}, \text{axes} = \text{boxed}) :$

> $\text{display}(p1, p2, \text{view} = [0 .. 1, 0 .. 1, 0 .. 1]);$



Titik Ekuilibrium E_4

- > restart :
- > with(DEtools) :
- > with(plots) :
- > m := 3.1; A := 0.85; B := 0.6; C1 := 0.41; C2 := 0.2; MU := 0.5;

$$m := 3.1$$

$$A := 0.85$$

$$B := 0.6$$

$$C1 := 0.41$$

$$C2 := 0.2$$

$$MU := 0.5$$

- >
- > PD1 := diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m*y(t));

$$PD1 := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 3.1 y(t))$$

- > PD2 := diff(y(t), t) = y(t) * (1 - 2*x(t) - y(t) + m*x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1);

$$PD2 := \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.59 + 1.1 x(t) - y(t) - \frac{0.85 z(t)}{0.6 + y(t)} \right)$$

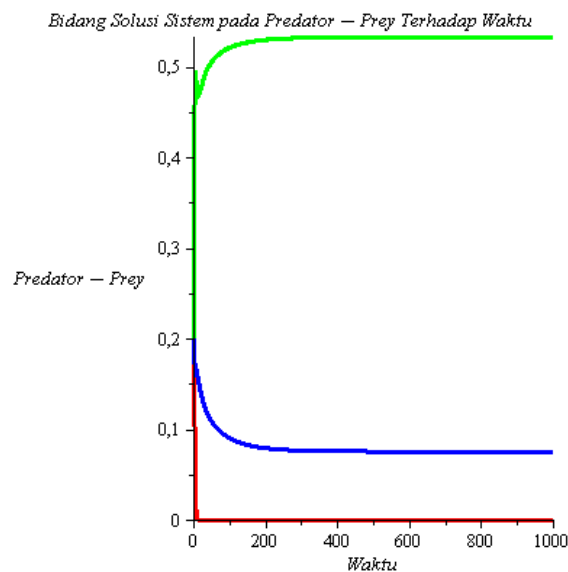
- > PD3 := diff(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2);

$$PD3 := \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.425 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right)$$

- >
- >
- >

>

```
display({phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0
..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], stepsize = 0.8, scene
= [t, x(t)], labels = ['Waktu', 'Predator - Prey'], linecolour
= [red]}), {phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t
= 0..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], style = POINT,
stepsize = 0.8, scene = [t, y(t)], labels = ['Waktu', 'Predator
- Prey'], linecolour = [green]}), {phaseportrait([PD1, PD2,
PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..1000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0)
= 0.2]], style = POINT, stepsize = 0.8, scene = [t, z(t)], labels = [
'Waktu', 'Predator - Prey'], title =
'Bidang Solusi Sistem pada Predator - Prey Terhadap Waktu',
linecolour = [blue]})};
```



> $m := 3.1; A := 0.85; B := 0.6; C1 := 0.41; C2 := 0.2; MU := 0.5;$

$m := 3.1$

$A := 0.85$

$B := 0.6$

$C1 := 0.41$

$C2 := 0.2$

$MU := 0.5$

>

>

```
SYS := [diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m*y(t)), diff(y(t), t)
= y(t) * (1 - 2*x(t) - y(t) + m*x(t) - (A*z(t))/(B + y(t))
- C1), diff(z(t), t) = z(t) * ((MU*A*y(t))/(B + y(t))
- C2)];
```

$$\text{SYS} := \left[\frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 3.1 y(t)), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.59 + 1.1 x(t) - y(t) - \frac{0.85 z(t)}{0.6 + y(t)} \right), \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.425 y(t)}{0.6 + y(t)} - 0.2 \right) \right]$$

>

> $IC := [[x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.3]];$

$$IC := [[x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.9], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.8, z(0) = 0.3], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.3]]$$

> $RHS := eval(map(rhs, SYS), [x(t) = x, y(t) = y, z(t) = z]);$

$$RHS := \left[x (1 - x - 3.1 y), y \left(0.59 + 1.1 x - y - \frac{0.85 z}{0.6 + y} \right), z \left(\frac{0.425 y}{0.6 + y} - 0.2 \right) \right]$$

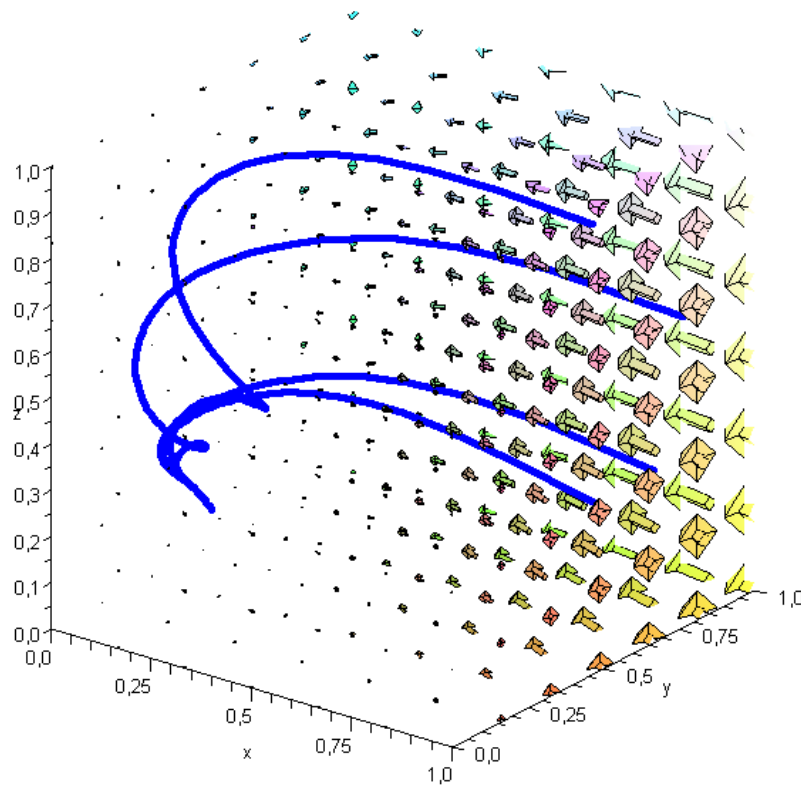
> $with(plots) :$

> $with(DEtools) :$

> $p1 := fieldplot3d(RHS, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, z = 0 .. 1, grid = [7, 7, 7], axes = boxed, arrows = `3-D`) ;$

> $p2 := DEplot3d(SYS, [x(t), y(t), z(t)], t = 0 .. 500, IC, stepsize = 0.2, linecolor = blue, axes = boxed) ;$

> $display(p1, p2, view = [0 .. 1, 0 .. 1, 0 .. 1]);$



Titik Ekuilibrium E_5

- > restart :
- > with(DEtools) :
- > with(plots) :
- > m := 2.1; A := 0.8; B := 0.4; C1 := 0.3; C2 := 0.2; MU := 0.5;

$$m := 2.1$$

$$A := 0.8$$

$$B := 0.4$$

$$C1 := 0.3$$

$$C2 := 0.2$$

$$MU := 0.5$$

- >
- > PD1 := diff(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m*y(t));

$$PD1 := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 2.1 y(t))$$

- >
- > PD2 := diff(y(t), t) = y(t) * (1 - 2*x(t) - y(t) + m*x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1);

$$PD2 := \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.7 + 0.1 x(t) - y(t) - \frac{0.8 z(t)}{0.4 + y(t)} \right)$$

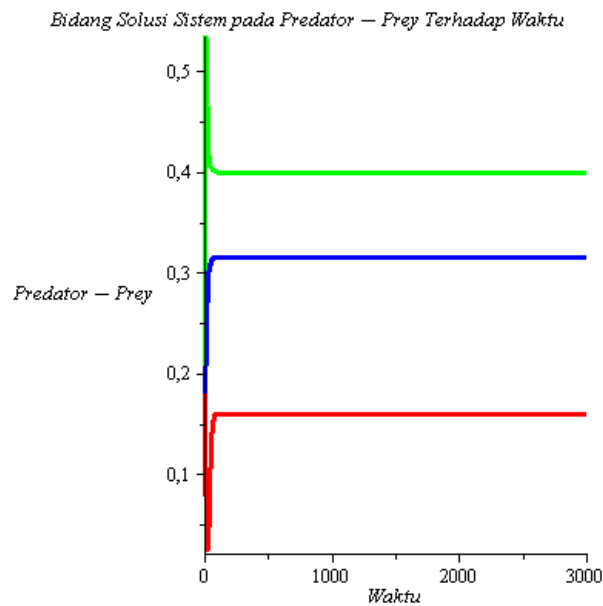
> $PD3 := \text{diff}(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2);$
 $PD3 := \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.40 y(t)}{0.4 + y(t)} - 0.2 \right)$

>

>

>

```
display({phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0
..3000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], stepsize = 0.8, scene
= [t, x(t)], labels = ['Waktu', 'Predator - Prey'], linecolour
= [red]}), {phaseportrait([PD1, PD2, PD3], [x(t), y(t), z(t)], t
= 0..3000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0) = 0.2]], style = POINT,
stepsize = 0.8, scene = [t, y(t)], labels = ['Waktu', 'Predator
- Prey'], linecolour = [green]}), {phaseportrait([PD1, PD2,
PD3], [x(t), y(t), z(t)], t = 0..3000, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.2, z(0)
= 0.2]], style = POINT, stepsize = 0.8, scene = [t, z(t)], labels = [
'Waktu', 'Predator - Prey'], title =
'Bidang Solusi Sistem pada Predator - Prey Terhadap Waktu',
linecolour = [blue]})});
```



> $m := 2.1; A := 0.8; B := 0.4; C1 := 0.3; C2 := 0.2; MU := 0.5;$

$m := 2.1$

$A := 0.8$

$B := 0.4$

$C1 := 0.3$

$C2 := 0.2$

$MU := 0.5$

>

> $SYS := [\text{diff}(x(t), t) = x(t) * (1 - x(t) - m * y(t)), \text{diff}(y(t), t) = y(t) * (1 - 2 * x(t) - y(t) + m * x(t) - (A * z(t)) / (B + y(t)) - C1), \text{diff}(z(t), t) = z(t) * ((MU * A * y(t)) / (B + y(t)) - C2)];$

$$SYS := \left[\frac{d}{dt} x(t) = x(t) (1 - x(t) - 2.1 y(t)), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \left(0.7 + 0.1 x(t) - y(t) - \frac{0.8 z(t)}{0.4 + y(t)} \right), \frac{d}{dt} z(t) = z(t) \left(\frac{0.40 y(t)}{0.4 + y(t)} - 0.2 \right) \right]$$

>

> $IC := [[x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.85], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.15]];$

$$IC := [[x(0) = 0.9, y(0) = 0.6, z(0) = 0.85], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.6], [x(0) = 0.9, y(0) = 0.9, z(0) = 0.15]]$$

> $RHS := \text{eval}(\text{map}(\text{rhs}, SYS), [x(t) = x, y(t) = y, z(t) = z]);$

$$RHS := \left[x (1 - x - 2.1 y), y \left(0.7 + 0.1 x - y - \frac{0.8 z}{0.4 + y} \right), z \left(\frac{0.40 y}{0.4 + y} - 0.2 \right) \right]$$

> $\text{with}(\text{plots}) :$

> $\text{with}(\text{DEtools}) :$

> $p1 := \text{fieldplot3d}(RHS, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, z = 0 .. 1, \text{grid} = [7, 7, 7], \text{axes} = \text{boxed}, \text{arrows} = \text{'3-D'}) :$

> $p2 := \text{DEplot3d}(SYS, [x(t), y(t), z(t)], t = 0 .. 500, IC, \text{stepsize} = 0.2, \text{linecolor} = \text{blue}, \text{axes} = \text{boxed}) :$

> $\text{display}(p1, p2, \text{view} = [0 .. 1, 0 .. 1, 0 .. 1]);$

