AUTOMORFISME GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Oleh:
RENI TRI DAMAYANTI
NIM. 07610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

AUTOMORFISME GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RENI TRI DAMAYANTI
NIM. 07610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

AUTOMORFISME GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Oleh:
RENI TRI DAMAYANTI
NIM. 07610029

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 15 Januari 2011

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP.19710420 200003 1 003	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

AUTOMORFISME GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Oleh:
RENI TRI DAMAYANTI
NIM. 07610029

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji			**Tanda Tangan**
1. **Penguji Utama**	:	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	______________
2. **Ketua Penguji**	:	**Evawati Alisah, M.Pd** **NIP. 19720604 199903 2 001**	______________
3. **Sekretaris Penguji**	:	**Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	______________
4. **Anggota**	:	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag** **NIP. 19720420 200212 1 003**	______________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Reni Tri Damayanti
NIM	:	07610029
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Penelitian	:	Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Januari 2011
Yang membuat pernyataan,

Reni Tri Damayanti
NIM. 07610029

MOTTO

Without Allah I'm Nothing,

Never Give Up!

PERSEMBAHAN

Karya ini tidaklah dapat terwujud tanpa ridho dari Allah SWT.
Terimakasih ya Allah dengan segala keterbatasan hamba ini, Engkau beri kesempatan untuk mempersembahkan karya yang sederhana ini.

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar karya ini penulis persembahkan sebagai cinta kasih dan bakti penulis untuk:

Ibu Srijanti dan Ayah Sudarman, serta Kakak Rudy Hardani Eko Daryanto
Terimakasih atas segala ketulusan do'a, nasehat, kasih sayang dan selalu menjadi motivator serta penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Alhamdulillahirobbil'alamiin... segala puji dan syukur bagi Allah, yang telah memberikan rahmat kepada semua makhluk di bumi, yang Maha Perkasa dan Maha Bijaksana, penguasa alam semesta yang telah memberikan kekuatan dan bimbingan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing kita ke jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Berkat bantuan, bimbingan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.

4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikan Beliau.
6. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
7. Ibu Srijanti dan Ayah Sudarman tercinta, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
8. Kakak penulis, Rudy Hardani Eko Daryanto tersayang, yang telah memberikan dukungan, doa, motivasi dan materi bagi penulis.
9. Muhamad Ulum Muzaqi, yang telah memberikan penyemangat dan motivasi bagi penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.
10. Teman-teman terbaik penulis, Any Tsalasatul Fitriyah, Fitrotin Nisa', Puspita Dyan, Nurjianah, Dewi Erla, Tri Utomo, Mohamad Syafi'i, Ahmad Saiful, dan seluruh teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan 2007 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan.

Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.

11. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua. *Amin ya Robbal 'Alamiin....*

Alhamdulillahirobbil Alamin

Malang, 19 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR i
DAFTAR ISI iv
DAFTAR GAMBAR vii
DAFTAR TABEL xi
ABSTRAK xii
ABSTRACT xiii

BAB I PENDAHULUAN
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 5
1.3. Batasan Masalah 5
1.4. Tujuan Penelitian 6
1.5. Manfaat Penelitian 6
1.6. Metode Penelitian 7
1.7. Sistematika Penulisan 9

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1. Fungsi 11
2.2. Grup 12
2.3. Grup Simetri 14
2.4. Definisi Graf 15

2.5. Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*) 16
2.6. Derajat Titik 18
2.7. Graf Terhubung 20
2.8. Jenis- jenis Graf 23
2.8.1 Graf Lintasan (Path Graph) 23
2.8.2 Graf Bintang (Star Graph) 24
2.9. Isomorfisme Graf 25
2.10. Automorfisme Graf 26
2.11. Kajian Graf dalam Surat *Al-Hujuraat* Ayat 10 29
2.12. Kajian Automorfisme Graf dalam Surat *Al-Israa'* Ayat 7 32

BAB III PEMBAHASAN

3.1. Automorfisme pada Graf Bintang 34
3.1.1 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) 36
3.1.2 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) 41
3.1.3 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) 52
3.1.4 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) 57
3.1.5 Graf Bintang-6 ($K_{1,6}$) 66
3.2. Automorfisme pada Graf Lintasan 70
3.2.1 Graf Lintasan-2 (P_2) 71
3.2.2 Graf Lintasan-3 (P_3) 72
3.2.3 Graf Lintasan-4 (P_4) 75
3.2.4 Graf Lintasan-5 (P_5) 84
3.2.5 Graf Lintasan-6 (P_6) 88
3.3. Himpunan Automorfisme Membentuk Grup 95
3.4. Pola Titik Automorfisme pada Graf 104
3.4.1 Graf Bintang 104
3.4.2 Graf Lintasan 109
3.5. Kajian Graf dalam Surat *Al-Hujuraat* Ayat 10 115
3.6. Kajian Automorfisme Graf dalam Surat *Al-Israa'* Ayat 7 118

BAB IV PENUTUP

4.1. Kesimpulan 121

4.2. Saran 122

DAFTAR PUSTAKA 122

LAMPIRAN **125**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Fungsi *f* 11

Gambar 2.2 Graf G dengan Order 4 dan Mempunyai 6 Sisi 16

Gambar 2.3 Graf *G* (5,7) 17

Gambar 2.4 Graf *G* 18

Gambar 2.5 Graf *G*(3,5) 20

Gambar 2.6 Jalan, Trail, dan Lintasan 21

Gambar 2.7 Graf Terhubung G_1 dan G_2 22

Gambar 2.8 Graf tak Terhubung G_3 22

Gambar 2.9 Graf Lintasan 23

Gambar 2.10 Graf Bipartisi 24

Gambar 2.11 G_1 Isomorfik dengan G_2 tetapi tidak Isomorfik dengan G_3 25

Gambar 2.12 Pemetaan Satu-satu 25

Gambar 2.13 Graf *G* 27

Gambar 2.14 Pemetaan Satu-satu yang dapat Dibangun dari Graf G 28

Gambar 3.1 Graf Bintang-2, Graf Bintang-3, Graf Bintang-4, Graf Bintang-5 35

Gambar 3.2 Graf Bintang-2, Graf Bintang-3, Graf Bintang-4, Graf Bintang-5 dengan Label Titik ……………………………...…… 35

Gambar 3.3 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) 36

Gambar 3.4 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan $\alpha_1 = (1)(2\ \ 3)$ 37

Gambar 3.5 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan $\alpha_2 = (1)(2)(3)$ 37

Gambar 3.6 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan $\alpha_3 = (1\ \ 3)(2)$ 38

Gambar 3.7 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_4= (1 2)(3) 39

Gambar 3.8 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_5= (1 2 3)...................................... 40

Gambar 3.9 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_6= (1 3 2)...................................... 41

Gambar 3.10 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) 41

Gambar 3.11 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_1= (1)(2 3 4) 42

Gambar 3.12 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_2 = (1)(2 4 3) 43

Gambar 3.13 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_3 = (1)(2)(3 4) 44

Gambar 3.14 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_4 = (1)(3)(2 4) 45

Gambar 3.15 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_5 = (1)(4)(2 3) 46

Gambar 3.16 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_6 = (1)(2)(3)(4)............................... 47

Gambar 3.17 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_7 = (1 4)(2)(3) 48

Gambar 3.18 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_8 = (1 3)(2)(4) 49

Gambar 3.19 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_9 = (1 2)(3)(4)................................. 49

Gambar 3.20 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{10} = (1 2)(3 4)................................. 50

Gambar 3.21 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{11} = (1 3)(2 4)................................. 51

Gambar 3.22 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{12} = (1 4)(2 3)................................. 52

Gambar 3.23 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) 52

Gambar 3.24 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan α_1 = (1)(2 3 4 5) 53

Gambar 3.25 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan α_2 = (1)(2 3 5 4) 54

Gambar 3.26 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) 57

Gambar 3.27 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) dengan α_1 = (1)(2 3 4 5 6) 58

Gambar 3.28 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) dengan α_2 = (1)(2 3 4 6 5) 59

Gambar 3.29 Graf Lintasan-2, Graf Lintasan-3, Graf Lintasan-4, Graf Lintasan-5, Graf Lintasan-6 70

Gambar 3.30 Graf Lintasan-2, Graf Lintasan-3, Graf Lintasan-4, Graf Lintasan-5, Graf Lintasan-6 dengan Label Titik 70

Gambar 3.31 Graf Lintasan-2 (P_2) 71

Gambar 3.32 Graf Lintasan-2 (P_2) dengan β_1 = (1)(2) 71

Gambar 3.33 Graf Lintasan-2 (P_2) dengan β_2 = (1 2) 72

Gambar 3.34 Graf Lintasan-3 (P_3) 72

Gambar 3.35 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_1 = (1)(2)(3) 73

Gambar 3.36 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_2 = (1 3)(2) 74

Gambar 3.37 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_3 = (1)(2 3) 75

Gambar 3.38 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_4 = (1 2) (3) 75

Gambar 3.39 Graf Lintasan-4 (P_4) 76

Gambar 3.40 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_1 = (1)(2)(3)(4) 76

Gambar 3.41 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_2 = (1 4)(2 3) 77

Gambar 3.42 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_3 = (1) (2) (3 4) 78

Gambar 3.43 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_4 = (1) (3) (2 4) 79

Gambar 3.44 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_5 = (1)(4)(2 3) 79

Gambar 3.45 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_6 = (2)(3)(1 4) 80

Gambar 3.46 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_7 = (2)(4)(1 3) 81

Gambar 3.47 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_8 = (3)(4)(1 2) 81

Gambar 3.48 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_9 = (1 2) (3 4) 82

Gambar 3.49 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_{10} = (1 3)(2 4) 83

Gambar 3.50 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_{11} = (1 2 4 3) 83

Gambar 3.51 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_{12} = (1 3 4 2) 84

Gambar 3.52 Graf Lintasan-5 (P_5) 84

Gambar 3.53 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan β_1 = (1)(2)(3)(4)(5) 85

Gambar 3.54 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan β_2 = (3)(1 5)(2 4) 86

Gambar 3.55 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan β_3 = (3)(1 2 5 4) 87

Gambar 3.56 Graf Lintasan-6 (P_6) 88

Gambar 3.57 Graf Lintasan-6 (P_6) dengan β_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) 89

Gambar 3.58 Graf Lintasan-6 (P_6) dengan β_2 = (1 6)(2 5)(3 4) 90

Gambar 3.59 Graf Lintasan-6 (P_6) dengan β_3 = (1)(2)(3)(4)(5 6) 92

Gambar 3.60 Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara 116

Gambar 3.61 Hubungan antara Allah dengan Manusia dan Alam Ciptaan-Nya. 117

Gambar 3.62 Representasi Graf terhadap Ibadah Sa'i 118

Gambar 3.63 Representasi Automorfisme dalam Kehidupan 119

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Tabel Cayley dari Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan Komposisi Fungsi 96
Tabel 3.2 Tabel Cayley dari Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan Komposisi Fungsi 96
Tabel 3.3 Tabel Cayley dari Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan Komposisi Fungsi 97
Tabel 3.4 Banyaknya Automorfisme dari $G(K_{1,n}) \rightarrow G(K_{1,n})$ 104
Tabel 3.5 Banyaknya Automorfisme Melalui Bentuk Permutasi Titiknya dari $K_{1,n}$ 106
Tabel 3.6 Banyaknya Automorfisme dari $G(P_n) \rightarrow G(P_n)$ 109
Tabel 3.7 Bentuk Umum Automorfisme dari $G(P_n) \rightarrow G(P_n)$ Berdasarkan Banyak Titik Genap dan Ganjil 109

ABSTRAK

Damayanti, Reni Tri. 2011. **Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (1) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(2) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: graf bintang $(K_{1,n})$, graf lintasan P_n, isomorfisme graf, automorfisme graf, dan grup simetri.

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Automorfisme pada suatu graf *G* adalah isomorfisme dari graf *G* ke *G* sendiri. Dengan kata lain automorfisme graf *G* merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf *G*, $E(G)$ yang menghasilkan graf yang isomorfik dengan dirinya sendiri. Jika φ adalah suatu automorfisme dari *G* ke *G* dan $v \in V(G)$ maka $deg\varphi(v) = deg_G(v)$. Untuk mencari automorfisme pada suatu graf, biasanya dilakukan dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu, onto, dan isomorfisme dari himpunan titik pada graf tersebut. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dan menguraikan automorfisme graf bintang dan graf lintasan serta penjabarannya.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka *(library research)*, dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Merumuskan masalah; (2) Menggambarkan graf bintang ($K_{1,2}$ sampai $K_{1,6}$) dan graf lintasan (P_2 sampai P_6); (3) Memberikan label pada setiap titik dari masing-masing graf yang telah digambarkan; (4) Menentukan semua kemungkinan fungsi permutasi yang satu-satu dan onto dari setiap graf pada dirinya sendiri; (5) Memilah fungsi permutasi yang automorfisme dan tidak automorfisme dari semua kemungkinan fungsi; (6) Menentukan karakteristik dari fungsi permutasi automorfisme; (7) Membangun teorema tentang banyak fungsi permutasi yang automorfisme dan bentuk fungsi permutasinya, serta pembuktiannya; (8) Menunjukkan bahwa himpunan automorfisme dari graf bintang dan graf lintasan dengan komposisi fungsi adalah membentuk grup

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh (1) Graf bintang-n $(K_{1,n})$ memiliki n+1 titik, banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$. Permutasinya α adalah automorfisme yang harus mengawetkan derajat titik-titiknya, oleh karena itu permutasinya harus berbentuk $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$. Jika $\alpha(K_{1,n}) = (v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n)$ fungsi bijektif maka $\alpha(K_{1,n})$ merupakan automorfisme; (2) Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi permutasi yang berbentuk: (1) untuk *n* genap: $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$, untuk n ganjil: $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$ dan (2) $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n)$.

ABSTRACT

Damayanti, Reni Tri. 2011. **Automorphism of Star Graph and Path Graph**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (1) Wahyu Henky Irawan, M. Pd
(2) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Keywords: star graph ($K_{1,n}$), path graph (P_n), graph isomorphism, graph automorphism, and symmetric group.

One of the this topic of interesting to be studied by at graph theory is about graph automorphism. Automorphism at one particular graph of *G* is isomorphism of graph of *G* to *G* itself. Equally, graph automorphism of *G* represent an permutation of vertices set of $V(G)$ or edges of graph of G, $E(G)$ to itself. If φ is an automorphism of *G* and of $v \in V(G)$ hence $deg\varphi v$ = $degv$. To look for automorphism at one particular graph in circuit, is usually conducted by determining all possibility of function which is one-to-one, onto, and isomorphism of vertices set at graph. Target of this research is to know and elaborate an automorphism of star graph and path graph and also its formulation.

In this research, research method the used is method research of book (library research) with the following research steps: (1) Formulating problem, (2) Drawing a star graph ($K_{1,2}$until $K_{1,6}$) and path graph (P_2 until P_6); (3) Giving vertex label of each vertices at each graph; (4) Determining all of possibility one-to-one function and onto from each graph to itself; (5) Classifying the function are automorphism and not automorphism from of all possibility function already written; (6) Determining the characteristic from automorphism function; (7) Proving real correct conjecture in general; (8) Showing that the set of automorphism together with composition function be a group.

Based on result of solution can be obtained (1) Star Graph ($K_{1,n}$) has n+1 vertex, the number of automorphism from mentioned graph is $n!$. Let α is an automorphism of $K_{1,n}$ to itself, thus $\alpha(v_1) = v_1$ and $\alpha(v_k) = v_t$ for each $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$. If $\alpha(K_{1,n})$ = $(v_1\ \ v_2\ \ v_3 \ldots v_n)$ is a bijection function, then $\alpha(K_{1,n})$ is automorphism; (2) There are two automorphism functions of path graph. These are: (1) to even n, the permutation form is $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$, to odd n, the permutation form is $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$ and (2) α_2 = $(v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n)$.

BAB I

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Alam semesta yang amat luas adalah ciptaan Allah, dan Al-Qur’an mengajak manusia untuk menyelidikinya, mengungkap keajaiban dan kegaibannya, serta berusaha memanfaatkan kekayaan alam yang melimpah ruah untuk kesejahteraan hidupnya. Inilah yang sesungguhnya dilakukan oleh ilmu pengetahuan, yaitu mengadakan observasi, lalu menarik hukum-hukum alam berdasarkan observasi dan eksperimen. Dengan demikian, ilmu pengetahuan dapat mencapai Yang Maha Pencipta melalui observasi yang teliti dan tepat terhadap hukum-hukum yang mengatur gejala alam (Rahman, 1992:1). Di antara ilmu pengetahuan modern yang mengungkap keajaiban Al-Qur’an salah satunya adalah ilmu pengetahuan matematika. Dalam firman Allah Q.S. *Al-Israa’* ayat 12 dijelaskan:

وَجَعَلۡنَا ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيۡنِۖ فَمَحَوۡنَآ ءَايَةَ ٱلَّيۡلِ وَجَعَلۡنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبۡصِرَةٗ
لِّتَبۡتَغُواْ فَضۡلٗا مِّن رَّبِّكُمۡ وَلِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ وَكُلَّ شَيۡءٖ فَصَّلۡنَٰهُ
تَفۡصِيلٗا ١٢

“Dan kami jadikan malam dan siang sebagai dua tanda, lalu kami hapuskan tanda malam dan kami jadikan tanda siang itu terang, agar kamu mencari kurnia dari Tuhanmu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan. dan segala sesuatu Telah kami terangkan dengan jelas.”

Ayat tersebut menjelaskan bahwa di dalam Al-Qur’an terdapat banyak kebesaran dan keagungan Allah, dan kepada tanda-tanda kekuasaan-Nya yang nampak nyata, yaitu matahari dan bulan, dan peranannya dalam menghitung tahun dan menetapkan waktu (Yusuf, 2005:281). Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi. Firman Allah dalam Al-Qur'an Q.S. *Al-Qamar* ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."

Seandainya Allah menciptakan segala sesuatu tanpa ukuran, maka akan terjadi ketidakseimbangan dalam alam ini. Ukuran yang diciptakan oleh Allah sangat tepat sehingga alam seperti yang telah dirasakan ini, benar-benar seimbang (Mulyono dalam Turmudi, 2006:211).

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang. Matematika adalah ratunya ilmu pengetahuan sehingga matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Matematika banyak membantu dan mempermudah dalam penyelesaian permasalahan pada kajian ilmu-ilmu lain. Oleh sebab itu, matematika menduduki posisi yang cukup penting dalam ilmu pengetahuan.

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf telah dikembangkan sejak tahun 1960, dimulai oleh Leonardo Euler yang menggambarkan suatu masalah lintasan yang melalui jembatan dan pulau di tengah kota Konigsberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf. Masalah tersebut digambarkan melalui titik dan sisi yang menghubungkan antar titik, yang akhirnya berkembang dan dikenal sebagai Graf.

Graf didefinisikan sebagai himpunan titik (*vertek*) yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi (*edge*) yang mungkin kosong. Himpunan titik dari suatu graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinyatakan dengan $E(G)$. Selanjutnya graf ini terus dikembangkan melalui riset-riset yang memberikan solusi termudah bagi masalah manusia khususnya tentang jaringan, lintasan, penjadwalan, dan sebagainya.

Sejalan dengan berkembangnya peradaban kehidupan manusia, graf telah marak dikembangkan melalui riset-riset pada tahun 1960-an. Saat ini, graf telah masuk dalam bagian kurikulum matematika yang wajib ditempuh khususnya pada jurusan matematika dan informatika. Banyak sekali kegunaan graf dalam aplikasi pada kehidupan manusia. Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang direpresentasikan oleh titik dan garis, agar menjadi lebih mudah dalam menganalisis dan pengambilan kesimpulan dari masalah yang bersangkutan. Misalnya, pada penggambaran jaringan komunikasi, ilmu komputer, riset operasi, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, dan lain-lainnya. Bahkan masalah penjadwalan dari mulai yang mudah sampai yang paling rumit seperti penjadwalan pesawat terbang, terminal, stasiun, perjalanan dan sebagainya, juga menggunakan prinsip graf.

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Tidak banyak teori yang mengkaji masalah automorfisme sehingga hal ini membuka peluang bagi matematikawan dan pemerhati matematika untuk melakukan riset-riset dalam membangun teori-teori khususnya tentang automorfisme graf. Pada penelitian yang terdahulu, telah dijumpai beberapa macam automorfisme pada graf G. Di antaranya adalah grup automorfisme dari graf komplit (K_n) dan graf sikel (C_n) (Rosyidah, 2010) serta automorfisme graf roda (W_n) dan graf tangga (L_n) (Fitriyah, 2011). Akan tetapi, belum dijumpai automorfisme graf bintang $(K_{1,n})$ dan graf lintasan (P_n). Sehingga berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk meneliti tentang **“Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan”.**

Rumusan Masalah

Masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagaimana rumus automorfisme graf bintang $(K_{1,n})$ dengan bentuk permutasi $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$?
b. Bagaimana rumus automorfisme graf lintasan P_n?
c. Apakah grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n?

d. Apakah grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2)?

Batasan Masalah

Agar pembahasan skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi objek kajian hanya pada automorfisme graf bintang dan graf lintasan. Pembahasan dimulai dengan menggambarkan masing-masing lima graf bintang dan graf lintasan tersebut mulai dari bintang-2 $(K_{1,2})$ sampai bintang-6 $(K_{1,6})$ dan graf lintasan yang dimulai dari lintasan-2 (P_2) sampai lintasan-6 (P_6). Pada graf bintang, teorema yang dibangun adalah (1) banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme, (2) bentuk fungsi permutasi yang automorfisme yaitu titik $v_1 \in V(K_{1,n})$ yang selalu dipetakan ke dirinya sendiri sedangkan titik lainnya dapat dipetakan ke sebarang titik kecuali v_1. Sedangkan pada graf lintasan, teorema yang dibangun adalah banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme dari graf P_n yaitu hanya 2 fungsi yang dibedakan berdasarkan banyak titik genap dan ganjil. Kemudian, menunjukkan himpunan automorfisme dari graf bintang $(K_{1,n})$ dan graf lintasan (P_n) dengan komposisi fungsi adalah membentuk grup.

Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

a. Mengetahui rumus automorfisme graf bintang $(K_{1,n})$ dengan bentuk permutasi $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$.

b. Mengetahui rumus automorfisme graf lintasan P_n.

c. Mengetahui bahwa grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n.
d. Mengetahui bahwa grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2).

Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

a. Bagi Penulis
   1. Tambahan pengetahuan tentang graf khususnya automorfisme graf dan sifat-sifatnya dari graf bintang dan graf lintasan.
   2. Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.
b. Bagi Lembaga
   1. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan bahan perkuliahan khususnya tentang materi automorfisme graf.
   2. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi automorfisme graf.
c. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai automorfisme graf, dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang.

Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat pertanyaan
2. Mengumpulkan data

   Peneliti mengumpulkan data yang berupa data primer dan data sekunder. Data primer dalam penelitian ini diperoleh dari hasil pengamatan langsung yang dilakukan penulis berupa gambar graf bintang ($K_{1,2}$ sampai $K_{1,6}$) dan gambar graf lintasan (P_2 sampai P_6), karakteristik titik, derajat titik dan sisi, dan fungsi permutasi. Sedangkan data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini berupa definisi, teorema, dalil, lemma, rumus, dan sifat yang terkait langsung maupun yang mendukung pengambilan kesimpulan pada penelitian ini dari beberapa literatur antara lain buku-buku, dokumen yang ada, skripsi-skripsi sebelumnya, dan lain-lain.

3. Menganalisis data

   Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penulisan ini adalah:

   a. Menggambarkan graf bintang ($K_{1,2}$ sampai $K_{1,6}$) dan graf lintasan (P_2 sampai P_6).
   b. Memberikan label pada setiap titik dari masing-masing graf yang telah digambarkan pada bagian a.
   c. Menentukan semua kemungkinan permutasi dari setiap graf pada dirinya sendiri dari bagian b.

d. Memilah permutasi yang automorfisme dan tidak automorfisme dari semua kemungkinan fungsi yang telah dituliskan pada bagian c.
e. Menentukan karakteristik automorfisme.
f. Membangun teorema tentang banyak automorfisme dan bentuk permutasinya, serta pembuktiannya.
g. Menunjukkan bahwa himpunan automorfisme dari graf bintang dan graf lintasan dengan komposisi fungsi adalah membentuk grup.

4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian dan melaporkan.

Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini membahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

   Bab ini berisi tentang dasar-dasar teori yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya seperti definisi fungsi, definisi grup, grup simetri, definisi graf, *adjacent* dan *incident*, derajat titik, graf terhubung, graf bintang, graf lintasan, isomorfisme graf, dan automorfisme graf.

3. **BAB III PEMBAHASAN**

   Dalam bab ini dipaparkan tentang semua kemungkinan pemutasi dari graf bintang dan graf lintasan ke dirinya sendiri yang dimulai dari graf bintang-2 $(K_{1,2})$ sampai bintang-6 $(K_{1,6})$ serta graf lintasan-2 (P_2) sampai lintasan-6 (P_6). Kemudian membahas mengenai: (a) pola dari automorfisme yang terbangun dan membuktikan bahwa pola tersebut berlaku umum serta (b) tentang himpunan automorfisme dari graf bintang dan graf lintasan dengan komposisi fungsi membentuk grup.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari materi-materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran.

BAB II

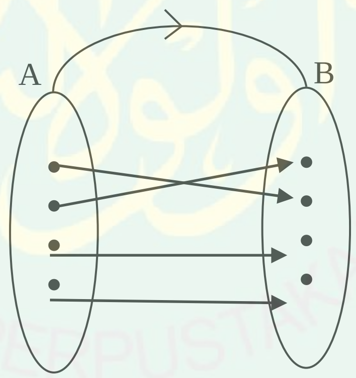
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Definisi 1:

Misal X dan Y adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu fungsi f dari X ke Y, dilambangkan dengan $f: X \to Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen X tepat satu pada elemen Y. X adalah domain dari fungsi dan Y adalah himpunan kodomainnya. Jika y adalah elemen yang unik di Y dipetakan oleh fungsi f ke elemen x, kita katakan bahwa y adalah peta dari x dan x adalah prapeta dari y dan kita tulis $y = f(x)$. Himpunan $f(X)$ disebut range fungsi. Range fungsi adalah himpunan bagian dari kodomainnya (Balakrishnan, 1991:7).

Contoh 1:



Gambar 2.1 Fungsi f

Himpunan $f = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, d)\}$ merupakan fungsi dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$. Setiap elemen dari A dipetakan tepat satu pada B, 1 dipetakan tepat satu ke b, 2 dipetakan tepat satu ke a, 3 dipetakan tepat satu ke c, 4 dipetakan tepat satu ke d. Hal ini dapat ditunjukkan pada gambar 2.7. Gambar seperti pada gambar 2.7 biasa disebut dengan diagram panah.

Definisi 2:

a) Misalkan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi 1-1 sering juga disebut dengan fungsi **injektif** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

b) Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi onto* jika $R(f) = B$. Jadi, $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in B$ maka ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi onto sering disebut juga fungsi **surjektif** atau fungsi **pada** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

c) Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi **bijektif** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

2.2 Grup

Definisi 3:

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \emptyset$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu * assosiatif).

b. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).

c. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut abelian (grup komutatif) jika a * b = b * a untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh 2:

Selidiki apakah (Z, +) adalah grup abelian!

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi :

a. Untuk setiap $a, b, c \in Z$, maka $a + b + c \in Z$ (sifat tertutup terhadap operasi +).

b. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu operasi + assosiatif).

c. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).

d. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ disebut invers dari a).

e. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif).

Jadi, (Z, +) adalah grup abelian.

2.3 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_φ adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_φ dengan operasi komposisi "o" atau (S_φ,o) adalah grup. Perhatikan bahwa "o" adalah operasi biner pada S_φ karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \text{ o } \tau$ juga merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "o" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_φ adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\Omega \text{ o } \Omega^{-1} = \Omega^{-1} \text{ o } \Omega = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_φ dengan operasi o. Grup (S_φ,o) disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 1991:28).

Pada kasus khusus dengan $\Omega = \{1,2,3, \dots, n)$ maka grup simetri pada Ω yang dinotasikan dengan S_n, yaitu *grup simetri dengan berderajat n* (Dummit dan Foote, 1991:28).

Perhatikan bahwa S_φ mempunyai order $n!$, dengan $S_\varphi = \{1,2,3, \dots, n\}$. Untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma: S \to S$, ada n macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada $n-1$ macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n(n-1)\dots(2)(1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S (Beachy dan Blair, 1990:93).

Contoh 3:

Misalkan $\Omega = \{1, 2, 3\}$, tentukan grup simetri dari S_3 tersebut!

Jawab:

Grup S_3 adalah grup simetri yang memuat 3! = 6 elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$ maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\ (2\ \ 3) = (2\ \ 3)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)\ (2) = (1\ \ 3)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)\ (3) = (1\ \ 2)$$

Jadi, grup simetri $S_3 = \{1, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2), (2\ \ 3), (1\ \ 3), (1\ \ 2)\}$.

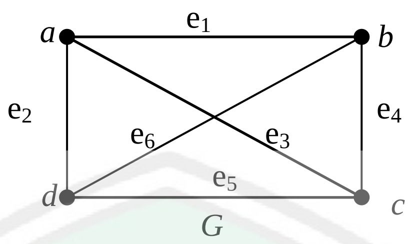
2.4 Graf

Definisi 4:

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* (banyak titik) dari graf G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* (banyak sisi) dari graf G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan size dari graf G tersebut cukup ditulis dengan $G(p,q)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh 4:



Gambar 2.2 Graf G dengan Order 4 dan Mempunyai 6 Sisi

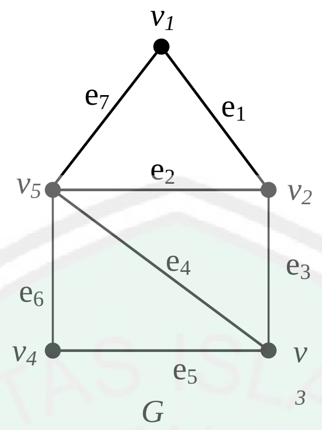
Graf G pada Gambar 2.2 dapat dinyatakan sebagai $G(4,6)$ dengan $V(G)=\{a,b,c,d\}$ dan $E(G)=\{(a,b),(a,d),(a,c),(b,c),(c,d),(b,d)\}$, atau ditulis dengan $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ untuk $e_1=(a,b), e_2=(a,d), e_3=(a,c), e_4=(b,c), e_5=(c,d), e_6=(b,d)$.

2.5 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Suatu graf paling sedikit memiliki sebuah titik. Suatu graf yang memiliki titik dan sisi maka dapat dinyatakan hubungan antara kedua titik dan sisi tersebut melalui definisi sebagai berikut:

Definisi 5:

Sisi $e=(u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e=(u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), sebagaimana v dan e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e=(u,v)$ akan ditulis $e=uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6).



Gambar 2.3 Graf G (5,7)

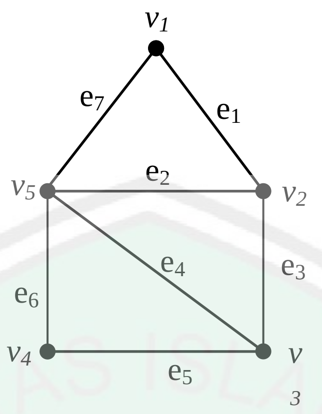
Dari Gambar 2.3 titik-titik *adjacent* (terhubung langsung) adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_5, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5, v_5 dan v_1. Sedangkan sisi e_1 *incident* (terkait langsung) dengan v_1 dan v_2, e_2 *incident* dengan v_2 dan v_5, e_3 *incident* dengan v_2 dan v_3, e_4 *incident* dengan v_3 dan v_5, e_5 *incident* dengan v_3 dan v_4, e_6 *incident* dengan v_4 dan v_5, dan e_7 *incident* dengan v_5 dan v_1.

2.6 Derajat Titik

Definisi 6:

Derajat titik v pada graf G, ditulis dengan $deg_G(v)$, adalah banyak sisi yang terkait langsung (*incident*) pada titik v. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 5:



Gambar 2.4 Graf *G*

Dari contoh graf yang diberikan pada gambar 2.4, dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut :

$deg_G(v_1) = 2$

$deg_G(v_2) = 3$

$deg_G(v_3) = 3$

$deg_G(v_4) = 2$

$deg_G(v_5) = 4$

Selanjutnya akan diberikan suatu teorema yang menunjukkan hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v \in G} deg\, \varphi(v) = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu 2 kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$$

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Corollary 1

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

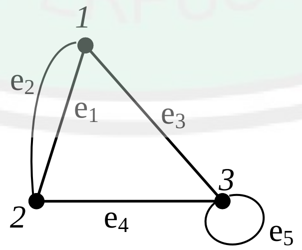
Bukti

Misalkan graf G dengan ukuran q, dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G, dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(G)} deg_G\,(v) = \sum_{v\in W} deg_G(v) + \sum_{v\in U} deg_G(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v\in U} deg_G(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W} deg_G(v)$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986:7-8).

Contoh 6:



Gambar 2.5 Graf G(3,5)

Menurut teorema di atas, graf $G(3,5)$ dapat dinyatakan dengan

$deg_G(1) + deg_G(2) + deg_G(3) = 3 + 3 + 4 = 10$

$= 2 \times$ banyak sisi $= 2 \times 5 = 10$

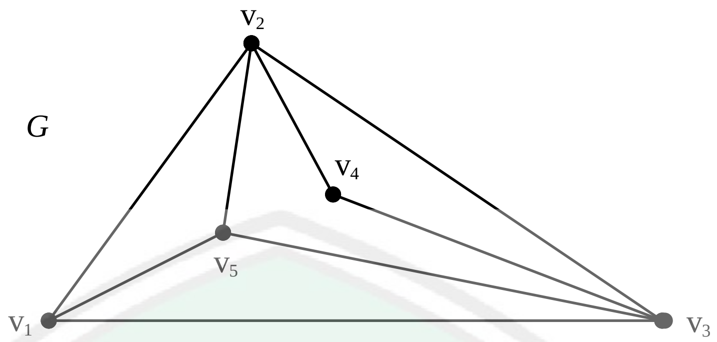
2.7 Graf Terhubung

Misalkan u dan v adalah titik-titik pada graf G. Suatu jalan u- v pada G adalah terhingga, yang dinyatakan dalam barisan

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

titik-titik dan sisi-sisi, yang diawali dengan titik u dan diakhiri dengan titik v, sehingga $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Bilangan n (bilangan yang ada pada sisi) disebut panjang jalan. Jalan kosong tidak memuat sisi, yaitu $n = 0$. Dimungkinkan ada pengulangan pada titik-titik dan sisi-sisi pada jalan. Seringkali hanya titik-titik pada jalan yang ditandai karena sisi-sisinya jelas. Dua jalan u-v dengan $u = u_0, u_1, \dots, u_{n=v}$ dan $u = v_0, v_1, \dots, v_m = v$ adalah sama jika dan hanya jika $n = m$ dan $u_i = v_i$ untuk $0 \leq i \leq n$; sebaliknya, adalah berbeda. Amati bahwa dua sisi yang berbeda pada jalan u- v di G mungkin sangat baik mendukung subgraf yang sama pada G (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Suatu jalan u-v adalah tertutup atau terbuka tergantung pada $u = v$ atau $u \neq v$. Suatu *trail* u-v adalah suatu jalan u-v yang mana tidak ada sisi yang diulang, sedangkan lintasan u-v adalah suatu jalan u-v yang mana tidak ada titiknya yang diulang. Titik u merupakan lintasan kosong u-u. Setiap lintasan adalah *trail*. Pada graf G pada gambar 2.6, $W_1: v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_3, v_4$ adalah jalan $v_1 - v_4$ yang bukan merupakan *trail*, $W_2: v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_4$ adalah *trail* $v_1 - v_4$ yang bukan merupakan lintasan, dan $W_3: v_1, v_3, v_4$ adalah lintasan $v_1 - v_4$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26-27).



Gambar 2.6 Jalan, Trail, dan Lintasan

Menurut definisi, setiap lintasan adalah jalan. Meskipun bertentangan dengan pernyataan tersebut yang tidak benar secara umum, hal ini dilakukan karena mengikuti teorema. Suatu jalan W dikatakan memuat jalan W' jika W' adalah sub barisan pada W (Chartrand dan Lesniak, 1986:27).

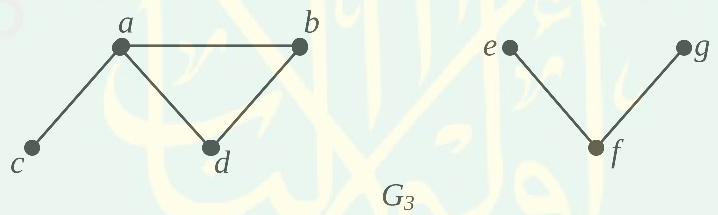
Suatu *trail* tertutup tak kosong pada graf G disebut sebagai sirkuit pada G, dan sirkuit $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1 (n \geq 3)$ yang mana n adalah titik v_i yang berbeda disebut sikel. Suatu graf asiklis tidak mempunyai sikel. Subgraf pada graf G terdukung dengan sisi-sisi pada *trail*, lintasan, sirkuit, atau sikel juga disebut sebagai *trail*, lintasan, sirkuit, atau sikel pada G. Suatu sikel adalah genap jika panjangnya adalah genap; demikian juga dengan ganjil. Suatu sikel dengan panjang n adalah sikel-n; sikel-3 juga disebut segitiga. Suatu graf dengan order n yaitu suatu lintasan atau sikel yang dinotasikan sebagai P_n atau C_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 7:

Graf *G* dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasangan titik *u* dan *v* di *G* ada lintasan (*u*,*v*) di *G*. Graf dikatakan tidak terhubung (*disconnected*), jika ada titik *u* dan *v* di *G*, tetapi tidak ada lintasan (*u*,*v*) di G. Komponen dari graf G adalah bagian maksimal dari graf G dan terhubung. Graf terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan graf genap/ganjil jika banyak titiknya genap/ganjil (Purwanto, 1998:8-9).

Contoh 7:

Gambar 2.7 Graf terhubung G_1 dan G_2



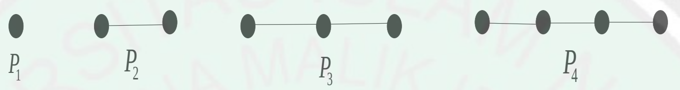
Gambar 2.8 Graf tak terhubung G_3

Graf G_3 ini terdiri dari himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan sisi $E = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (e,f), (f,g)\}$. Graf G_3 ini merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat jalan dari a ke e, yang dihubungkan oleh sisi, sehingga terpisah menjadi dua komponen. Bagian-bagian dari susunan graf yang menyebabkan grafnya tidak terhubung maka bagian tersebut dinamakan komponen graf (Grimaldi, 1985:533).

2.8 Jenis-jenis Graf

2.8.1 Graf Lintasan (*Path Graph*)

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n verteks dilambangkan oleh P_n. Perhatikan bahwa P_n memiliki n-tepi, dan dapat diperoleh dari graf siklus C_n dengan menghapus sebuah sisi (Watkins dan Wilson, 1990:37).



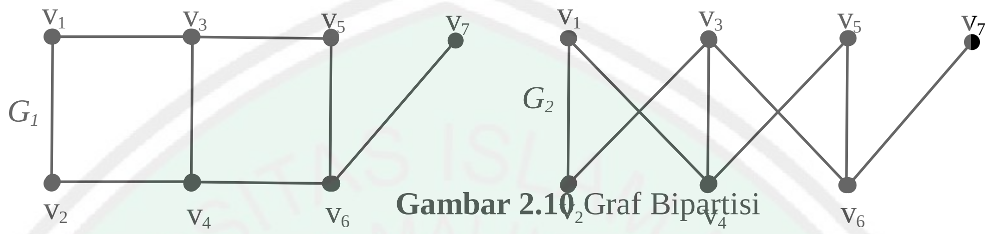
Gambar 2.9 Graf Lintasan

Dari gambar 2.9 di atas, graf P_1 hanya mempunyai satu titik, maka P_1 tidak mempunyai sisi. Pada graf P_2 mempunyai dua titik dan satu sisi. Pada graf P_3 mempunyai tiga titik dan dua sisi. Sedangkan, pada graf P_4 mempunyai empat titik dan tiga sisi. Jadi, penulis dapat menentukan beberapa ciri khusus dari graf lintasan P_n adalah setiap titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 1 dan titik selain titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 2.

2.8.2 Graf Bintang (*Star Graph*)

Suatu graf G lengkap partisi-n adalah graf partisi-n dengan himpunan-himpunan partisi $V_1, V_2, \dots, V_n$ yang memiliki sifat tambahan yaitu jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$ maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = P_i$, kemudian graf ini dinotasikan dengan $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$. (Order pada bilangan $p_1, p_2, \dots, p_n$ tidak penting.) Ingat bahwa graf lengkap partisi-n adalah lengkap jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i, dalam hal ini adalah K_n. Jika $p_i = t$ untuk semua i, kemudian graf lengkap partisi-n adalah tetap dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Maka, $K_{n(t)} \cong K_n$.

Suatu graf bipartisi lengkap dengan himpunan partisi V_1 dan V_2, dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, kemudian dinotasikan dengan $K(m,n)$. Graf $K(1,n)$ disebut graf bintang (Chartrand dan Lesniak, 1986:10).



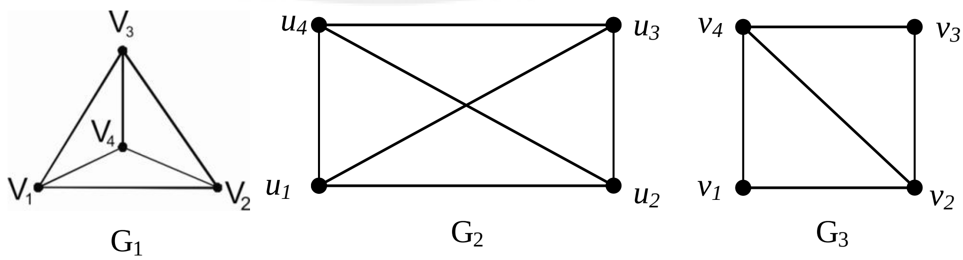
Gambar 2.10 Graf Bipartisi

2.9 Isomorfisme Graf

Definisi 8:

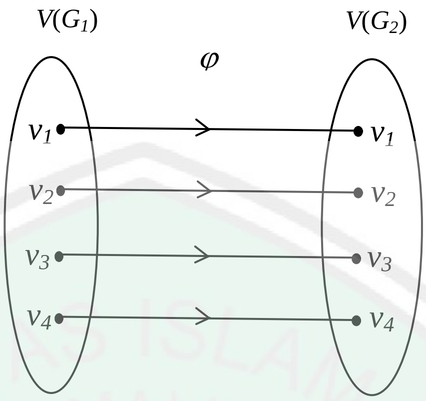
Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu φ antara $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sedemikian hingga misal $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(u)\varphi(v)) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfis terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:5).

Contoh 8:



Gambar 2.11 G_1 Isomorfik dengan G_2 tetapi tidak Isomorfik dengan G_3

Pemetaan φ: $V(G_1) \to V(G_2)$ didefinisikan oleh:



Gambar 2.12 Pemetaan Satu-satu

$$\varphi(v_1) = u_1, \qquad \varphi(v_2) = u_2, \qquad \varphi(v_3) = u_3, \qquad \varphi(v_4) = u_4$$

Akan dibuktikan bahwa (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), $(v_3,v_4) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(v_1),\varphi(v_2))$, $(\varphi(v_1),\varphi(v_3))$, $(\varphi(v_1),\varphi(v_4))$, $(\varphi(v_2),\varphi(v_3))$, $(\varphi(v_2),\varphi(v_4))$, $(\varphi(v_3),\varphi(v_4)) \in E(G_2)$.

$(v_1, v_2) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big) = (u_1, u_2) \in E(G_2)$

$(v_1, v_3) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_1), \varphi(v_3)\big) = (u_1, u_3) \in E(G_2)$

$(v_1, v_4) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_1), \varphi(v_4)\big) = (u_1, u_4) \in E(G_2)$

$(v_2, v_3) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_2), \varphi(v_3)\big) = (u_2, u_3) \in E(G_2)$

$(v_2, v_4) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_2), \varphi(v_4)\big) = (u_2, u_4) \in E(G_2)$

$(v_3, v_4) \in E(G_1)$ dan $\big(\varphi(v_3), \varphi(v_4)\big) = (u_3, u_4) \in E(G_2)$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $G_1 \cong G_2$.

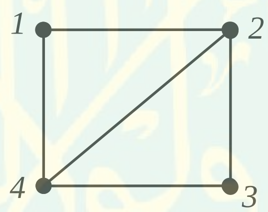
2.10 Automorfisme Graf

Definisi 9:

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$. Jika φ adalah suatu automorfisme dari G dan $v \in V(G)$ maka $deg_G \varphi(v) = deg_G(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:250).

Contoh 9:

Misal diberikan graf G seperti di bawah ini:



Gambar 2.13 Graf G

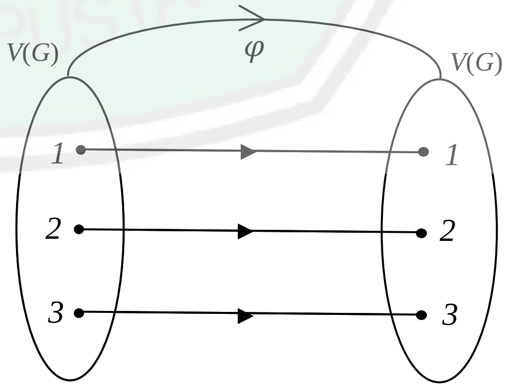
Diberikan pemetaan $\varphi: V(G) \rightarrow V(G)$, maka automorfisme yang mungkin dari graf G di atas adalah:

1. $\varphi(1) = 1$

   $\varphi(2) = 2$

   $\varphi(3) = 3$

   Atau dapat ditulis
   φ= (1) (2) (3)

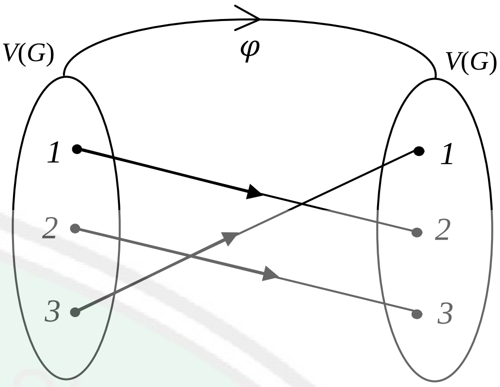


2. $\varphi(1) = 2$

$\varphi(2) = 3$

$\varphi(3) = 1$

Atau dapat ditulis
$\varphi = (1\ 2\ 3)$

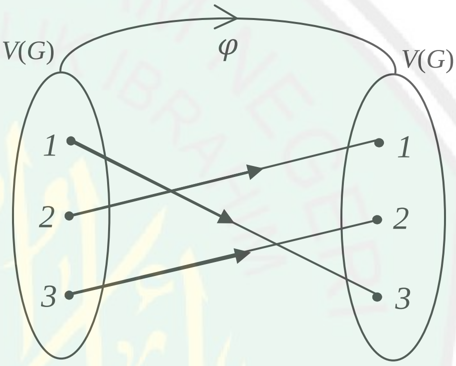


3. $\varphi(1) = 3$

$\varphi(2) = 1$

$\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
$\varphi = (1\ 3\ 2)$

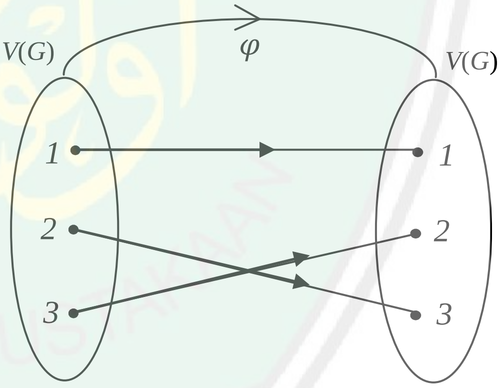


4. $\varphi(1) = 1$

$\varphi(2) = 3$

$\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
$\varphi = (1)\ (2\ 3)$

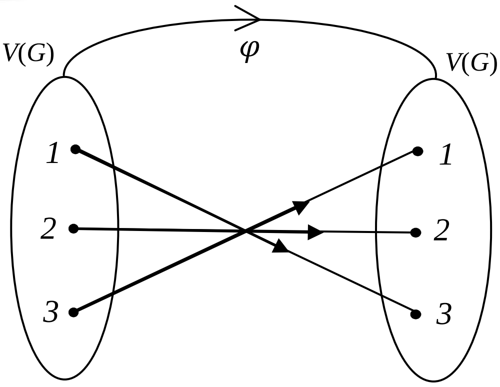


5. $\varphi(1) = 1$

$\varphi(2) = 3$

$\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
$\varphi = (2)\ (1\ 3)$

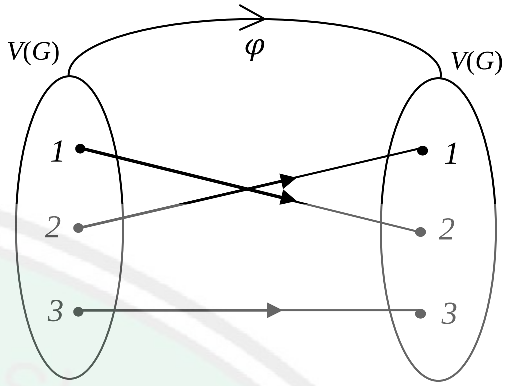


6. $\varphi(1) = 1$

$\varphi(2) = 3$

$\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
φ= (3) (1 2)



Gambar 2.14 Pemetaan Satu-satu yang dapat Dibangun dari Graf *G*

2.11 Kajian Graf dalam Surat *Al-Hujuraat* Ayat 10

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, pemodelan matematika, logika berpikir, teori graf, dan lain-lain.

Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah pasangan himpunan (*V*,*E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dalam Al-Qur'an elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik dan rukun antar sesama umat. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada Q.S. *Al-Hujuraat* ayat 10:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

"*Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat.*"

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang mukmin itu bersaudara dalam agama Allah SWT. Mereka satu keluarga seperti anak-anak dari seorang ayah dalam berkasih sayang dan tolong menolong. Apabila terjadi perselisihan di antara mereka, orang-orang mukmin yang lain harus mendamaikan di antara mereka, disertai ketakwaan pada Allah SWT dengan melaksanakan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Barang siapa melakukan hal itu niscaya Allah SWT memberi rahmat kepadanya dengan mengampuni dosanya dan mengabulkan permintaannya berupa pahala besar dan kenikmatan yang abadi (Al-Qarni, 2007c:465).

Hubungan antara Allah dengan manusia dan alam juga dijelaskan dalam Q.S. *Al-Imran* ayat 112 sebagai berikut:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو
بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ
ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

“Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas.”

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah SWT menimpakan kehinaan, kenistaan, dan kerugian kepada orang-orang Yahudi, dimanapun mereka berada. Mereka dikalahkan dalam pertempuran, meskipun pada beberapa putaran mereka menang atas orang-orang beriman. Mereka hanya terlindungi dari kehinaan dan kekalahan ini berkat perjanjian yang berlangsung antara mereka dengan pihak lain. Mereka akan tetap aman selama perjanjian ini masih berlaku. Orang-orang Yahudi tersebut telah menyebabkan Allah SWT memurkai, mengutuk, dan menghinakan mereka akibat perbuatan mereka, berupa pelanggaran perjanjian, pembunuhan terhadap para nabi, pendustaan terhadap para Rasul, kedurhakaan, pengubahan Al-Kitab, dan penggantian teks-teks dalil. Allah SWT pun membuat jiwa mereka miskin, mental mereka payah, cita-cita mereka rendah, dan semangat mereka runtuh. Mereka telah durhaka terhadap Allah SWT dengan meninggalkan perintah-Nya. Mereka juga telah melampaui batas dengan melanggar larangan, cenderung kepada setan, dan memerangi Allah Yang Maha Pengasih (Al-Qarni, 2007a:456).

Representasi yang lain dari suatu graf adalah ibadah sa’i. Shafa dan Marwah merupakan bagian dari rangkaian ibadah haji. Artinya, orang yang menunaikan ibadah haji dan umrah berkewajiban untuk melakukan sa’i diantara keduanya sebanyak tujuh kali. Firman Allah SWT dalam Q.S. *Al-Baqarah* Ayat 158:

إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلۡمَرۡوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِۖ فَمَنۡ حَجَّ ٱلۡبَيۡتَ أَوِ ٱعۡتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيۡهِ
أَن يَطَّوَّفَ بِهِمَاۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيۡرٗا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ١٥٨

"Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. Dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati, Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui."

Ayat ini menunjukkan bahwa Allah senantiasa menghargai orang yang mau beramal dan menerima yang sedikit dan membalasnya dengan yang lebih banyak. Bahkan, Allah akan mengganjar setiap perbuatan, kendati perbuatan tersebut baru sebatas di niat dan belum dikerjakan. Allah juga berjanji akan melipatgandakan pahala dari suatu kebaikan dan membalas setiap ketaatan dengan memberikan pemahaman di dalam hati, kesehatan di badan, kebaikan dalam perilaku, dan keberkahan di dalam rezeki. Dan semua itu, tentu saja akan diperoleh sesuai dengan tingkat ketaatan, niat, dan usaha masing-masing, karena Allah Maha Mengetahui kemampuan setiap orang dan apa yang berhak untuk ia dapatkan. Jelasnya, setiap pemberian Allah itu berdasarkan hikmah dan juga mengandung rahmat (Al-Qarni, 2007a:345).

2.12 Kajian Automorfisme Graf dalam Surat *Al-Israa'* Ayat 7

إِنۡ أَحۡسَنتُمۡ أَحۡسَنتُمۡ لِأَنفُسِكُمۡۖ وَإِنۡ أَسَأۡتُمۡ فَلَهَاۚ فَإِذَا جَآءَ وَعۡدُ ٱلۡأٓخِرَةِ
لِيَسُـࣳٔواْ وُجُوهَكُمۡ وَلِيَدۡخُلُواْ ٱلۡمَسۡجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٖ وَلِيُتَبِّرُواْ مَا
عَلَوۡاْ تَتۡبِيرًا ٧

"*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri; dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam masjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai*."

Ayat ini memberitakan kepada umat Islam bahwa jika manusia berbuat baik kepada Allah SWT dengan cara menaati-Nya, dan kepada sesama manusia dengan berinteraksi sebaik-baiknya, serta bertakwa kepada Allah dalam ucapan dan perbuatan maka pahala semua itu akan diterima dan kebaikannya akan kembali kepada manusia itu sendiri. Sebab, Allah tidak membutuhkan manusia dan harta-hartanya. Jika manusia berbuat buruk dengan kemaksiatan dan dosa maka siksaan akan menimpa manusia dan bencana akan turun kepada manusia itu sendiri (Al-Qarni, 2007b:758).

Lebih lanjut tafsir menurut Tengku Muhammad Hasby (2000:743) jika seseorang memperbaiki amalan berarti seseorang itu berbuat baik kepada dirinya sendiri. Sebab, pahala amal seseorang adalah untuk dirinya sendiri. Sebaliknya, jika seseorang berbuat jahat (maksiat) atau merusak amalannya dengan membuat kerusakan dan kezaliman, akibat dari semua itu akan kembali kepada dirinya sendiri.

BAB III

PEMBAHASAN

Automorfisme dari suatu graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau himpunan sisi-sisi dari graf G ($E(G)$). Dengan kata lain automorfisme dari suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri, yaitu fungsi yang memetakan ke dirinya sendiri. Pada bab ini akan dibahas mengenai automorfisme suatu graf pada graf bintang dan graf lintasan.

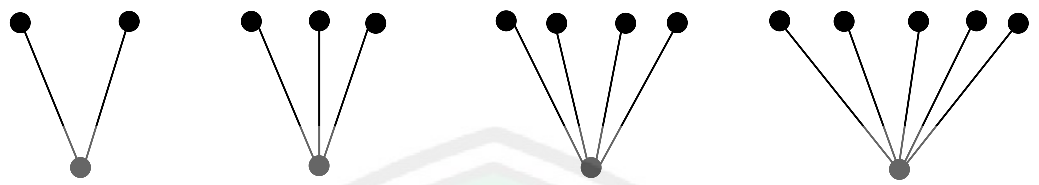
3.1 Automorfisme pada Graf Bintang

Pembahasan pada bab ini akan dimulai dari (1) penggambaran grafnya secara umum; kemudian (2) pemberian label pada titik-titiknya; dan (3) menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto berbentuk permutasi dari bagian 2; (4) memilah fungsi permutasi yang automorfisme dan bukan automorfisme dari bagian 3; (5) menentukan teorema; serta (6) membuktikan teorema.

Misalkan graf bintang $(K_{1,n})$ dengan himpunan titik

$$V\left(K_{1,n}\right) = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1})$$

Beberapa graf bintang diberikan seperti berikut:

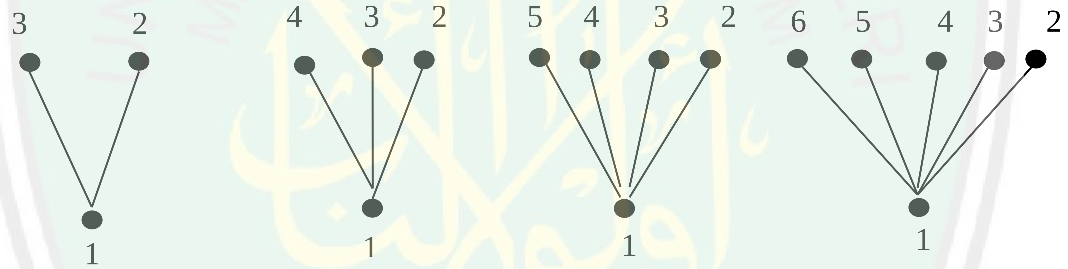


Bintang-2 Bintang-3 Bintang-4 Bintang-5

$K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{1,4}$ $K_{1,5}$

Gambar 3.1 Graf Bintang-2, Graf Bintang-3, Graf Bintang-4, Graf Bintang-5

Selanjutnya akan diberikan label untuk masing-masing titik pada graf-graf tersebut seperti berikut ini:



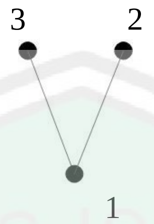
Bintang-2 $K_{1,2}$ Bintang-3 $K_{1,3}$ Bintang-4 $K_{1,4}$ Bintang-5 $K_{1,5}$

Gambar 3.2 Graf Bintang-2, Graf Bintang-3, Graf Bintang-4, Graf Bintang-5 dengan Label Titik

Kemudian akan ditentukan automorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf tersebut. Langkah ini dimulai dari graf bintang-2 sebagai berikut:

3.1.1 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$)

Graf bintang-2 yang titik-titiknya diberi label berikut:



Gambar 3.3 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$)

Himpunan titik pada graf bintang-2 dimisalkan sebagai $V(K_{1,2})$ = {1, 2, 3}. Diberikan suatu fungsi dari bintang-2 pada dirinya sendiri yaitu $\alpha : K_{1,2} \rightarrow K_{1,2}$.

Banyaknya semua kemungkinan fungsi α yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari bintang-2 kepada dirinya sendiri sebanyak 6 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme sebanyak 2 fungsi dan yang bukan automorfisme sebanyak 4 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

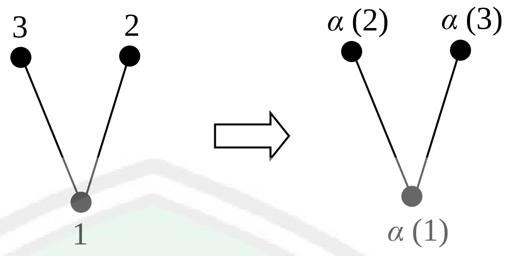
1. α_1 = (1)(2 3)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_1(1) = 1$; $\alpha_1(2) = 3$ dan $\alpha_1(3) = 2$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\alpha(v_i)$	1	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.4 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_1 = (1)(2 3)

Fungsi α_1 = (1)(2 3) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,3) $\in E(K_{1,2})$ maka (α(1),α(3)) = (1,3) $\in E(K_{1,2})$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,3) pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi (1,2) $\in E(K_{1,2})$.

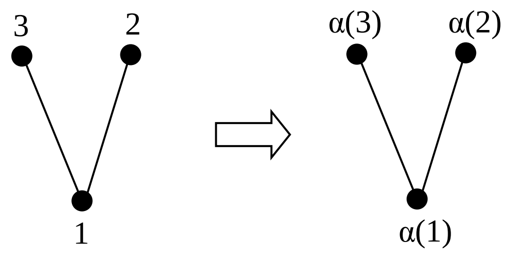
2. α_2 = (1)(2)(3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_2(1) = 1$; $\alpha_2(2) = 2$ dan $\alpha_2(3) = 3$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\alpha(v_i)$	1	2	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.5 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_2= (1) (2) (3)

Fungsi α_2 = (1)(2)(3) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,3) ∈ $E(K_{1,2})$ maka (α(1), α(3)) = (1,3) ∈ $E(K_{1,2})$. Begitu pula untuk sisi (1,2) dan (2,3)∈$E(K_{1,2})$ maka α((1,2)) dan α((2,3))∈$E(K_{1,2})$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, dengan selalu α(v_1) = v_1, sehingga bayangan titik v_i(i≠1) oleh fungsi α juga tetap terhubung dengan titik pusat, dengan kata lain bahwa (v_1,v_j)∈$E(K_{1,2})$ → (α(v_1),α(v_j))∈$E(K_{1,2})$ dengan j≠1. Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari bintang-2 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

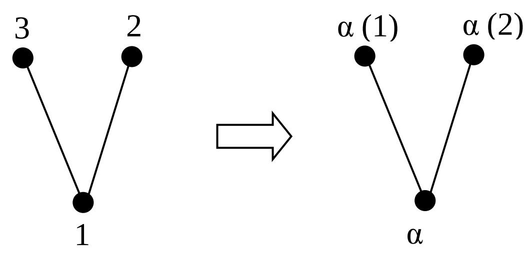
b. Fungsi-fungsi yang bukan automorfisme:

1. α_3 = (1 3)(2)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa α_3(1) = 3 ; α_3(2) = 2 dan α_3(3) = 1 atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
α(v_i)	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.6 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_3= (1 3)(2)

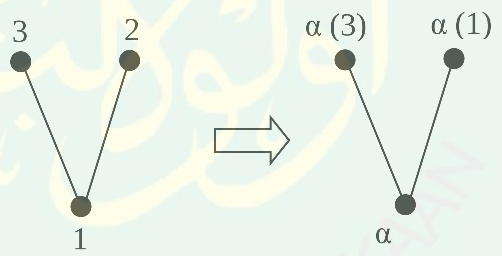
Fungsiα_3 = (1   3)(2) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) ∈ $E(K_{1,2})$ maka (α(1),α(2)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (2,3) ∉ $E(K_{1,2})$].

2. α_4 = (1   2)(3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_4(1) = 2$; $\alpha_4(2) = 1$ dan $\alpha_4(3) = 3$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\alpha(v_i)$	2	1	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.7 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_4= (1   2)(3)

Fungsi α_4 = (1   2)(3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,2})$ maka (α(1),α(3)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada pada graf itu sendiri [(α(1), α(3)) = (2,3) ∉ $E(K_{1,2})$].

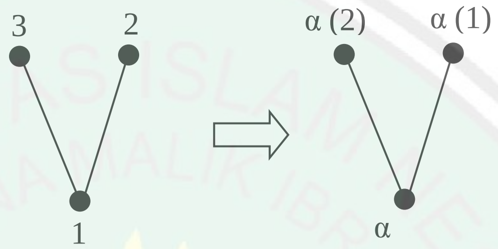
3. α_5 = (1 2 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_5(1) = 2$; $\alpha_5(2) = 3$ dan $\alpha_5(3) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
α(v_i)	2	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.8 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan α_5= (1 2 3)

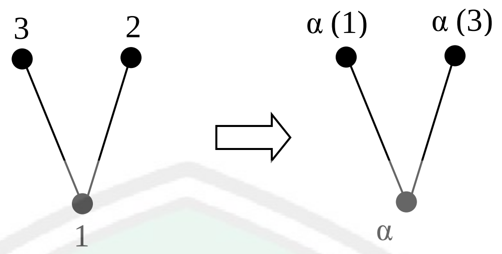
Fungsi α_5 = (1 2 3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) ∈ $E(K_{1,2})$ maka (α(1),α(2)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada pada graf itu sendiri, [(α(1), α(2)) = (2,3) ∉ $E(K_{1,2})$].

4. α_6 = (1 3 2)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_6(1) = 3$; $\alpha_6(2) = 1$ dan $\alpha_6(3) = 2$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
α(v_i)	3	1	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



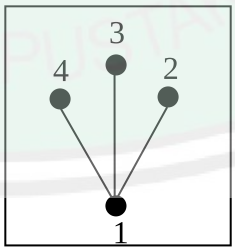
Gambar 3.9 Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan $\alpha_6 = (1 \ \ 3 \ \ 2)$

Fungsi $\alpha_6 = (1 \ \ 3 \ \ 2)$ adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) $\in E(K_{1,2})$ maka (α(1),α(3)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada pada graf itu sendiri atau [(α(1), α(3)) = (2,3) $\notin E(K_{1,2})$].

Kesimpulannya, banyaknya fungsi yang bukan automorfisme dari bintang-2 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 4 fungsi.

3.1.2 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$)

Gambar grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$)

Himpunan titik pada graf bintang-3 dimisalkan sebagai $V(K_{1,3}) = \{1, 2, 3, 4\}$. Diberikan suatu fungsi dari bintang-3 pada dirinya sendiri yaitu α : $K_{1,3} \rightarrow K_{1,3}$.

Banyaknya semua kemungkinan fungsi α yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari bintang-3 kepada dirinya sendiri sebanyak 24 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 6 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

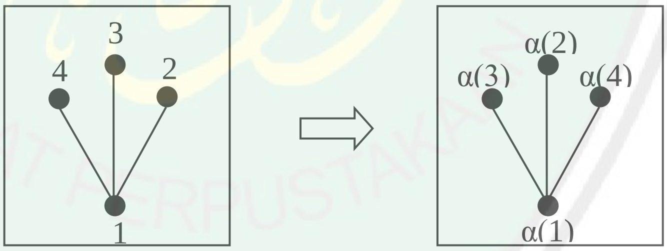
1. α_1 = (1)(2 3 4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_1(1) = 1$; $\alpha_1(2) = 3$; $\alpha_1(3) = 4$; dan $\alpha_1(4) = 2$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	3	4	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.11 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_1= (1)(2 3 4)

Fungsi α_1 = (1)(2 3 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) $\in E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (1,4) terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3))= (1,4) $\in E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) $\in E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_1 juga anggota $E(K_{1,3})$.

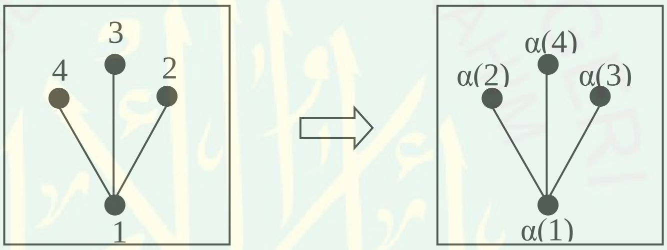
2. α_2 = (1)(2 4 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_2(1) = 1$; $\alpha_2(2) = 4$; $\alpha_2(3) = 2$; dan $\alpha_2(4) = 3$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	4	2	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.12 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_2 = (1)(2 4 3)

Fungsi α_2 = (1)(2 43) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) $\in E(K_{1,3})$ maka (α(1), α(3)) = (1,2) terdapat sisi pada graf hasil fungsi tersebut [(α(1), α(3)) = (1,2) $\in E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) $\in E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_2 juga anggota $E(K_{1,3})$.

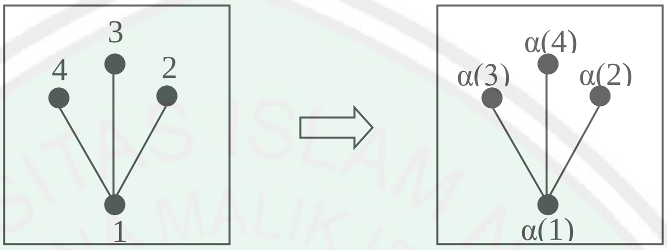
3. α_3= (1)(2)(3 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_3(1) = 1$; $\alpha_3(2) = 2$; $\alpha_3(3) = 4$; dan $\alpha_3(4) = 3$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	2	4	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.13 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$), dengan α_3= (1)(2)(3 4)

Fungsi α_3 = (1)(2)(3 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka(α(1),α(3)) = (1,4) terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (1,4) ∈ $E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) ∈ $E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_3 juga anggota $E(K_{1,3})$.

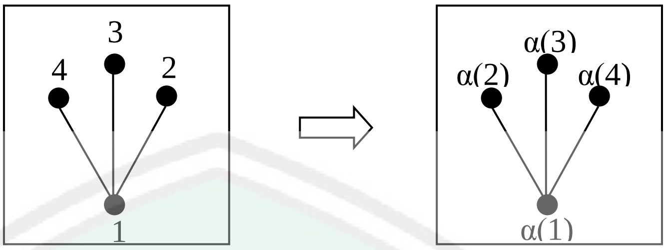
4. α_4 = (1)(3)(2 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_4(1) = 1$; $\alpha_4(2) = 4$; $\alpha_4(3) = 3$; dan $\alpha_4(4) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	4	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.14 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_4= (1)(3)(2 4)

Fungsi α_4= (1)(3)(2 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (1,3) terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) ∈ $E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_4 juga anggota $E(K_{1,3})$.

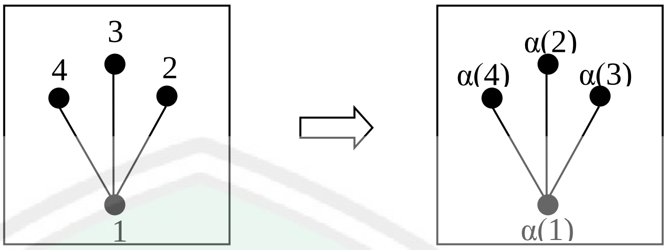
5. α_5= (1)(4)(2 3)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_5(1) = 1$; $\alpha_5(2) = 3$; $\alpha_5(3) = 2$; dan $\alpha_5(4) = 4$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	3	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.15 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_5= (1)(4)(2 3)

Fungsi α_5= (1)(4)(2 3) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) $\in$ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (1,2) terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (1,2) $\in E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) $\in$ $E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_5 juga anggota $E(K_{1,3})$.

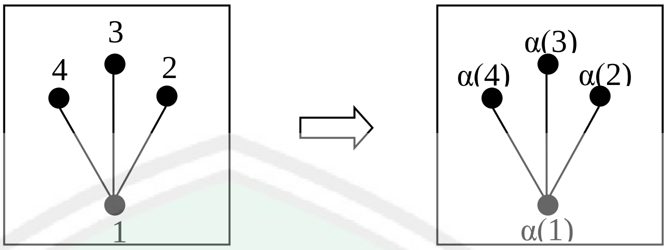
6. α_6 = (1)(2)(3)(4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_6(1) = 1$; $\alpha_6(2) = 2$; $\alpha_6(3) = 3$; dan $\alpha_6(4) = 4$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	1	2	3	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.16 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_6 = (1)(2)(3)(4)

Fungsi α_6 = (1)(2)(3)(4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (1,3) terdapat pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$]. Begitu pula untuk sisi (1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) ∈ $E(K_{1,3})$ maka bayangannya oleh fungsi α_6 juga anggota $E(K_{1,3})$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, dengan selalu $\alpha(v_1) = v_1$, sehingga bayangan titik $v_i(i\neq1)$ oleh fungsi α juga tetap terhubung dengan titik pusat, dengan kata lain bahwa $(v_1,v_j) \in E(K_{1,3}) \rightarrow (\alpha(v_1),\alpha(v_j)) \in E(K_{1,3})$ dengan $j\neq1$. Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari bintang-3 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 6 fungsi.

b. Fungsi-fungsi yang bukan automorfisme:

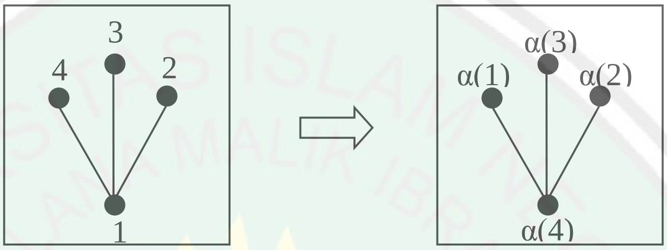
1. α_7 = (1 4)(2)(3)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_7(1) = 4$; $\alpha_7(2) = 2$; $\alpha_7(3) = 3$; dan $\alpha_7(4) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
α(v_i)	4	2	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.17 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_7 = (1 4)(2)(3)

Fungsi α_7= (1 4)(2)(3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (4,3) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (4,3) ∉ $E(K_{1,3})$].

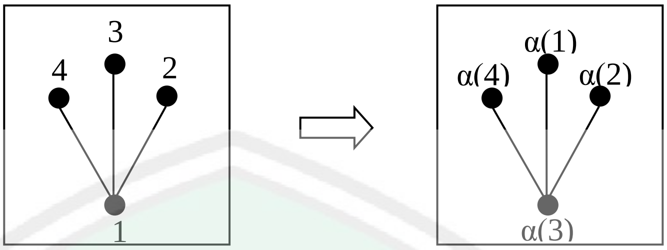
2. α_8= (1 3)(2)(4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_8(1) = 3$; $\alpha_8(2) = 2$; $\alpha_8(3) = 1$; dan $\alpha_8(4) = 4$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
α(v_i)	3	2	1	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.18 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_8= (1 3)(2)(4)

Fungsi α_8 = (1 3)(2)(4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(2)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (2,3) ∉ $E(K_{1,3})$].

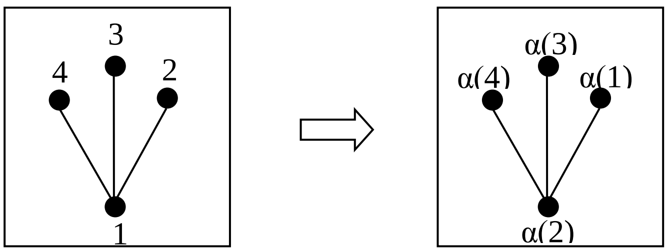
3. α_9 = (1 2)(3)(4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_9(1) = 2$; $\alpha_9(2) = 1$; $\alpha_9(3) = 3$; dan $\alpha_9(4) = 4$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
α(v_i)	2	1	3	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.19 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_9 = (1 2)(3)(4)

Fungsi α_9 = (1 2)(3)(4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (2,3) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (2,3) $\notin E(K_{1,3})$].

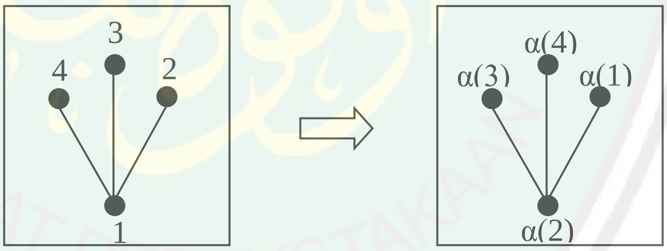
4. α_{10} = (1 2)(3 4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_{10}(1) = 2$; $\alpha_{10}(2) = 1$; $\alpha_{10}(3) = 4$; dan $\alpha_{10}(4) = 3$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	2	1	4	3

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.20 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{10} = (1 2)(3 4)

Fungsi α_{10} = (1 2)(3 4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∈ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (2,4) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [(α(1),α(3)) = (2,4) ∉ $E(K_{1,3})$].

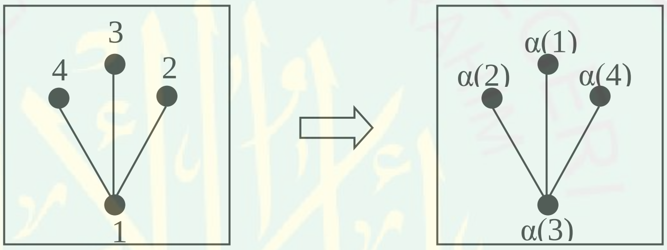
5. α_{11} = (1 3)(2 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_{11}(1) = 3$; $\alpha_{11}(2) = 4$; $\alpha_{11}(3) = 1$; dan $\alpha_{11}(4) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	3	4	1	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.21 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{11} = (1 3)(2 4)

Fungsi α_{11}= (1 3)(2 4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,2) \in E(K_{1,3})$ maka $(\alpha(1),\alpha(2)) = (3,4)$ tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, $[(\alpha(1),\alpha(2)) = (3,4) \notin E(K_{1,3})]$.

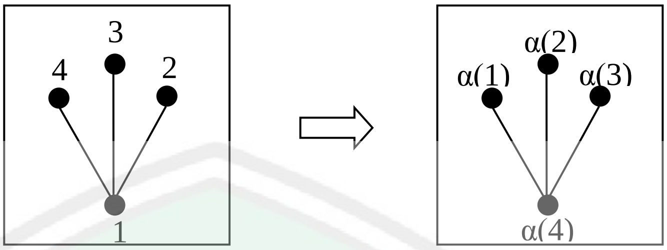
6. α_{12} = (1 4)(2 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_{12}(1) = 4$; $\alpha_{12}(2) = 3$; $\alpha_{12}(3) = 2$; dan $\alpha_{12}(4) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\alpha(v_i)$	4	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

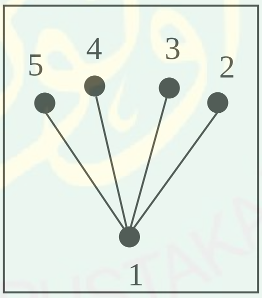


Gambar 3.22 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan α_{12} = (1 4)(2 3)

Fungsi α_{12}= (1 4)(2 3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,3) ∊ $E(K_{1,3})$ maka (α(1),α(3)) = (4,2) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, [(α(1),α(3)) = (4,2) ∉ $E(S_3)$].

3.1.3 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$)

Gambar grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.23 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$)

Himpunan titik pada graf bintang-4 dimisalkan sebagai $V(K_{1,4})$ = {1, 2, 3, 4, 5}. Diberikan suatu fungsi dari bintang-4 pada dirinya sendiri yaitu α : $K_{1,4} \rightarrow K_{1,4}$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi α yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari bintang-4 kepada dirinya sendiri sebanyak 120 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 24 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

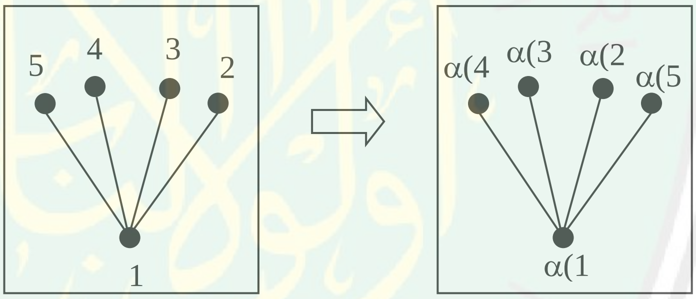
1. α_1 = (1)(2 3 4 5)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_1(1) = 1$; $\alpha_1(2) = 3$; $\alpha_1(3) = 4$; $\alpha_1(4) = 5$; $\alpha_1(5) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\alpha(v_i)$	1	3	4	5	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.24 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan α_1 = (1)(2 3 4 5)

Fungsi α_1 = (1)(2 3 4 5) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi $(1,4) \in E(K_{1,4})$ maka $(\alpha(1),\alpha(4)) = (1,5) \in E(K_{1,4})$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,5) pada graf hasil fungsi tersebut. Begitu pula untuk sisi $(1,3),(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5) \in E(K_{1,4})$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh α_1 juga ada di $E(K_{1,4})$.

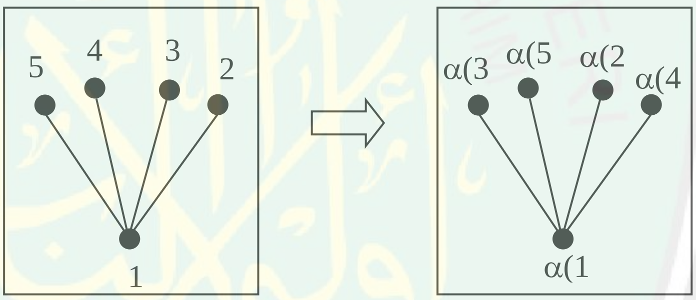
2. α_2 = (1)(2 3 5 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_2(1) = 1$; $\alpha_2(2) = 3$; $\alpha_2(3) = 5$; $\alpha_2(4) = 2$; $\alpha_2(5) = 4$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\alpha(v_i)$	1	3	5	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.25 Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan α_2 = (1)(2 3 5 4)

Fungsi α_2= (1)(2 3 5 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,4) ∈ $E(K_{1,4})$ maka (α(1),α(4)) = (1,2) ∈ $E(K_{1,4})$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf hasil fungsi tersebut. Begitu pula untuk sisi (1,3),(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5) ∈ $E(K_{1,4})$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh α_2 juga ada di $E(K_{1,4})$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu:

$\alpha_3 = (1)(2\ 4\ 3\ 5)$

$\alpha_4 = (1)(2\ 4\ 5\ 3)$

$\alpha_5 = (1)(2\ 5\ 3\ 4)$

$\alpha_6 = (1)(2\ 5\ 4\ 3)$

$\alpha_7 = (1)(2)(3\ 4\ 5)$

$\alpha_8 = (1)(2)(3\ 5\ 4)$

$\alpha_9 = (1)(3)(2\ 4\ 5)$

$\alpha_{10} = (1)(3)(2\ 5\ 4)$

$\alpha_{11} = (1)(4)(2\ 3\ 5)$

$\alpha_{12} = (1)(4)(2\ 5\ 3)$

$\alpha_{13} = (1)(5)(2\ 3\ 4)$

$\alpha_{14} = (1)(5)(2\ 4\ 3)$

$\alpha_{15} = (1)(2)(3)(4\ 5)$

$\alpha_{16} = (1)(2)(4)(3\ 5)$

$\alpha_{17} = (1)(2)(5)(3\ 4)$

$\alpha_{18} = (1)(3)(4)(2\ 5)$

$\alpha_{19} = (1)(3)(5)(2\ 4)$

$\alpha_{20} = (1)(4)(5)(2\ 3)$

$\alpha_{21} = (1)(2\ 3)(4\ 5)$

$\alpha_{22} = (1)(2\ 4)(3\ 5)$

$\alpha_{23} = (1)(2\ 5)(3\ 4)$

$\alpha_{24} = (1)(2)(3)(4)(5)$

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, dengan selalu $\alpha(v_1) = v_1$, sehingga bayangan titik $v_i(i \neq 1)$ oleh fungsi α juga tetap terhubung dengan titik pusat, dengan kata lain bahwa $(v_1,v_j) \in E(K_{1,4}) \rightarrow (\alpha(v_1),\alpha(v_j)) \in E(K_{1,4})$ dengan $j \neq 1$. Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari bintang-4 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 24 fungsi.

b. **Beberapa fungsi yang bukan automorfisme:**

α_{25} = (1 5)(2)(3)(4)

α_{26} = (1 4)(2)(3)(5)

α_{27} = (1 3)(2)(4)(5)

α_{28} = (1 2)(3)(4)(5)

α_{29} = (1 3) (2) (4 5)

α_{30} = (1 4) (2) (3 5)

α_{31} = (1 5) (2) (3 4)

α_{32} = (1 2) (3) (4 5)

α_{33} = (1 4) (3) (2 5)

α_{34} = (1 5) (3) (2 4)

α_{35} = (1 2) (4) (3 5)

α_{36} = (1 3) (4) (2 5)

α_{37} = (1 5) (4) (2 3)

α_{38} = (1 2) (5) (3 4)

α_{39} = (1 3) (5) (2 4)

α_{40} = (1 4) (5) (2 3)

α_{41} = (1 2)(3 4 5)

α_{42} = (1 2)(3 5 4)

α_{43} = (1 3)(2 4 5)

α_{44} = (1 3)(2 5 4)

α_{45} = (1 4)(2 3 5)

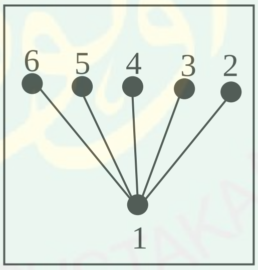
α_{46} = (1 4)(2 5 3)

α_{47} = (1 5)(2 3 4)

α_{48} = (1 5)(2 4 3)

3.1.4 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$)

Gambar grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.26 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$)

Himpunan titik pada graf bintang-5 dimisalkan sebagai $V(K_{1,5})$ = {1, 2, 3, 4, 5,6}. Diberikan suatu fungsi dari bintang-5 pada dirinya sendiri yaitu α: $K_{1,5} \rightarrow K_{1,5}$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi α yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari bintang-5 kepada dirinya sendiri sebanyak 720 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 120 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

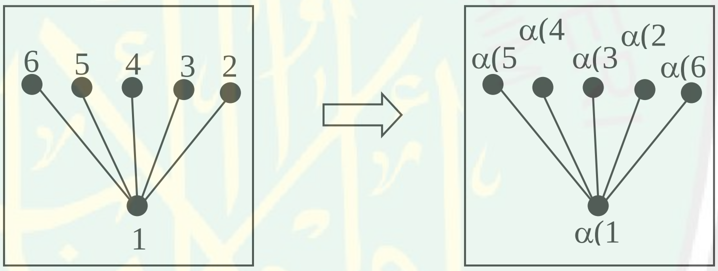
1. α_1 = (1)(2 3 4 5 6)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_1(1) = 1$; $\alpha_1(2) = 3$; $\alpha_1(3) = 4$; $\alpha_1(4) = 5$; $\alpha_1(5) = 6$; $\alpha_1(6) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\alpha(v_i)$	1	3	4	5	6	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.27 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) dengan α_1 = (1)(2 3 4 5 6)

Fungsi α_1 = (1)(2 3 4 5 6) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,6) $\in E(K_{1,5})$ maka $(\alpha(1),\alpha(6)) = (1,2) \in E(K_{1,5})$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf hasil fungsi tersebut. Begitu pula untuk sisi (1,3),(1,2),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6), (5,6) $\in E(K_{1,5})$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh α_1 juga ada di $E(K_{1,5})$.

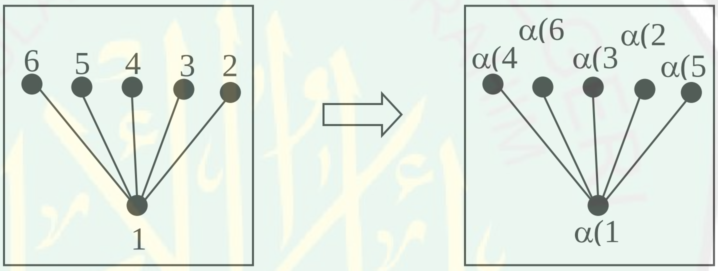
2. α_2 = (1)(2 3 4 6 5)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\alpha_2(1) = 1$; $\alpha_2(2) = 3$; $\alpha_2(3) = 4$; $\alpha_2(4) = 6$; $\alpha_2(5) = 2$; $\alpha_2(6) = 5$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\alpha(v_i)$	1	3	4	6	2	5

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.28 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) dengan α_2 = (1)(2 3 4 6 5)

Fungsi α_2= (1)(2 3 4 6 5) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,6) $\in E(K_{1,5})$ maka (α(1),α(6)) = (1,5) $\in E(K_{1,5})$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,5) pada graf hasil fungsi tersebut. Begitu pula untuk sisi (1,3),(1,2),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6) $\in E(K_{1,5})$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh α_2 juga ada di $E(K_{1,5})$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu:

$\alpha_3 = (1)(2\ 3\ 5\ 4\ 6)$
$\alpha_4 = (1)(2\ 3\ 5\ 6\ 4)$
$\alpha_5 = (1)(2\ 3\ 6\ 4\ 5)$
$\alpha_6 = (1)(2\ 3\ 6\ 5\ 4)$
$\alpha_7 = (1)(2\ 4\ 3\ 5\ 6)$
$\alpha_8 = (1)(2\ 4\ 3\ 6\ 5)$
$\alpha_9 = (1)(2\ 4\ 5\ 3\ 6)$
$\alpha_{10} = (1)(2\ 4\ 5\ 6\ 3)$
$\alpha_{11} = (1)(2\ 4\ 6\ 3\ 5)$
$\alpha_{12} = (1)(2\ 4\ 6\ 5\ 3)$
$\alpha_{13} = (1)(2\ 5\ 3\ 4\ 6)$
$\alpha_{14} = (1)(2\ 5\ 3\ 6\ 4)$
$\alpha_{15} = (1)(2\ 5\ 4\ 3\ 6)$
$\alpha_{16} = (1)(2\ 5\ 4\ 6\ 3)$
$\alpha_{17} = (1)(2\ 5\ 6\ 3\ 4)$
$\alpha_{18} = (1)(2\ 5\ 6\ 4\ 3)$
$\alpha_{19} = (1)(2\ 6\ 3\ 4\ 5)$
$\alpha_{20} = (1)(2\ 6\ 3\ 5\ 4)$
$\alpha_{21} = (1)(2\ 6\ 4\ 3\ 5)$
$\alpha_{22} = (1)(2\ 6\ 4\ 5\ 3)$
$\alpha_{23} = (1)(2\ 6\ 5\ 3\ 4)$
$\alpha_{24} = (1)(2\ 6\ 5\ 4\ 3)$
$\alpha_{25} = (1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)$

$\alpha_{32} = (1)(3)(2\ 4\ 6\ 5)$
$\alpha_{33} = (1)(3)(2\ 5\ 4\ 6)$
$\alpha_{34} = (1)(3)(2\ 5\ 6\ 4)$
$\alpha_{35} = (1)(3)(2\ 6\ 4\ 5)$
$\alpha_{36} = (1)(3)(2\ 6\ 5\ 4)$
$\alpha_{37} = (1)(4)(2\ 3\ 5\ 6)$
$\alpha_{38} = (1)(4)(2\ 3\ 6\ 5)$
$\alpha_{39} = (1)(4)(2\ 5\ 3\ 6)$
$\alpha_{40} = (1)(4)(2\ 5\ 6\ 3)$
$\alpha_{41} = (1)(4)(2\ 6\ 3\ 5)$
$\alpha_{42} = (1)(4)(2\ 6\ 5\ 3)$
$\alpha_{43} = (1)(5)(2\ 3\ 4\ 6)$
$\alpha_{44} = (1)(5)(2\ 3\ 6\ 4)$
$\alpha_{45} = (1)(5)(2\ 4\ 3\ 6)$
$\alpha_{46} = (1)(5)(2\ 4\ 6\ 3)$
$\alpha_{47} = (1)(5)(2\ 6\ 3\ 4)$
$\alpha_{48} = (1)(5)(2\ 6\ 4\ 3)$
$\alpha_{49} = (1)(6)(2\ 3\ 4\ 5)$
$\alpha_{50} = (1)(6)(2\ 3\ 5\ 4)$
$\alpha_{51} = (1)(6)(2\ 4\ 3\ 5)$
$\alpha_{52} = (1)(6)(2\ 4\ 5\ 3)$
$\alpha_{53} = (1)(6)(2\ 5\ 3\ 4)$
$\alpha_{54} = (1)(6)(2\ 5\ 4\ 3)$

$\alpha_{26} = (1)(2)(3\ 4\ 6\ 5)$ $\alpha_{55} = (1)(2)(3)(4\ 5\ 6)$

$\alpha_{27} = (1)(2)(3\ 5\ 4\ 6)$ $\alpha_{56} = (1)(2)(3)(4\ 6\ 5)$

$\alpha_{28} = (1)(2)(3\ 5\ 6\ 4)$ $\alpha_{57} = (1)(2)(4)(3\ 5\ 6)$

$\alpha_{29} = (1)(2)(3\ 6\ 4\ 5)$ $\alpha_{58} = (1)(2)(4)(3\ 6\ 5)$

$\alpha_{30} = (1)(2)(3\ 6\ 5\ 4)$ $\alpha_{59} = (1)(2)(5)(3\ 4\ 6)$

$\alpha_{31} = (1)(3)(2\ 4\ 5\ 6)$ $\alpha_{60} = (1)(2)(5)(3\ 6\ 4)$

$\alpha_{61} = (1)(2)(6)(3\ 4\ 5)$ $\alpha_{91} = (1)(2\ 6)(3\ 4\ 5)$

$\alpha_{62} = (1)(2)(6)(3\ 5\ 4)$ $\alpha_{92} = (1)(2\ 6)(3\ 5\ 4)$

$\alpha_{63} = (1)(3)(4)(2\ 5\ 6)$ $\alpha_{93} = (1)(3\ 4)(2\ 5\ 6)$

$\alpha_{64} = (1)(3)(4)(2\ 6\ 5)$ $\alpha_{94} = (1)(3\ 4)(2\ 6\ 5)$

$\alpha_{65} = (1)(3)(5)(2\ 4\ 6)$ $\alpha_{95} = (1)(3\ 5)(2\ 4\ 6)$

$\alpha_{66} = (1)(3)(5)(2\ 6\ 4)$ $\alpha_{96} = (1)(3\ 5)(2\ 6\ 4)$

$\alpha_{67} = (1)(3)(6)(2\ 4\ 5)$ $\alpha_{97} = (1)(3\ 6)(2\ 4\ 5)$

$\alpha_{68} = (1)(3)(6)(2\ 5\ 4)$ $\alpha_{98} = (1)(3\ 6)(2\ 5\ 4)$

$\alpha_{69} = (1)(4)(5)(2\ 3\ 6)$ $\alpha_{99} = (1)(4\ 5)(2\ 3\ 6)$

$\alpha_{70} = (1)(4)(5)(2\ 6\ 3)$ $\alpha_{100} = (1)(4\ 5)(2\ 6\ 3)$

$\alpha_{71} = (1)(4)(6)(2\ 3\ 5)$ $\alpha_{101} = (1)(4\ 6)(2\ 3\ 5)$

$\alpha_{72} = (1)(4)(6)(2\ 5\ 3)$ $\alpha_{102} = (1)(4\ 6)(2\ 5\ 3)$

$\alpha_{73} = (1)(5)(6)(2\ 3\ 4)$ $\alpha_{103} = (1)(5\ 6)(2\ 3\ 4)$

$\alpha_{74} = (1)(5)(6)(2\ 4\ 3)$ $\alpha_{104} = (1)(5\ 6)(2\ 4\ 3)$

$\alpha_{75} = (1)(2)(3)(4)(5\ 6)$ $\alpha_{105} = (1)(2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\alpha_{76} = (1)(2)(3)(5)(4\ 6)$ $\alpha_{106} = (1)(2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\alpha_{77} = (1)(2)(3)(6)(4\ 5)$ $\alpha_{107} = (1)(2)(3\ 6)(4\ 5)$

α_{78} = (1)(2)(4)(5)(3 6)

α_{79} = (1)(2)(4)(6)(3 5)

α_{80} = (1)(2)(5)(6)(3 4)

α_{81} = (1)(3)(4)(5)(2 6)

α_{82} = (1)(3)(4)(6)(2 5)

α_{83} = (1)(3)(5)(6)(2 4)

α_{84} = (1)(4)(5)(6)(2 3)

α_{85} = (1)(2 3)(4 5 6)

α_{86} = (1)(2 3)(4 6 5)

α_{87} = (1)(2 4)(3 5 6)

α_{88} = (1)(2 4)(3 6 5)

α_{89} = (1)(2 5)(3 4 6)

α_{90} = (1)(2 5)(3 6 4)

α_{108} = (1)(3)(2 4)(5 6)

α_{109} = (1)(3)(2 5)(4 6)

α_{110} = (1)(3)(2 6)(4 5)

α_{111} = (1)(4)(2 3)(5 6)

α_{112} = (1)(4)(2 5)(3 6)

α_{113} = (1)(4)(2 6)(3 5)

α_{114} = (1)(5)(2 3)(4 6)

α_{115} = (1)(5)(2 4)(3 6)

α_{116} = (1)(5)(2 6)(3 4)

α_{117} = (1)(6)(2 3)(4 5)

α_{118} = (1)(6)(2 4)(3 5)

α_{119} = (1)(6)(2 5)(3 4)

α_{120} = (1)(2)(3)(4)(5)(6)

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, dengan selalu $\alpha(v_1) = v_1$, sehingga bayangan titik $v_i (i \neq 1)$ oleh fungsi α juga tetap terhubung dengan titik pusat, dengan kata lain bahwa $(v_1,v_j) \in E(K_{1,5}) \rightarrow (\alpha(v_1),\alpha(v_j)) \in E(K_{1,5})$ dengan $j \neq 1$. Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari bintang-5 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 120 fungsi.

b. Beberapa fungsi yang bukan automorfisme:

α_{121} = (1 6)(2)(3)(4)(5)

α_{122} = (1 5)(2)(3)(4)(6)

α_{123} = (1 4)(2)(3)(5)(6)

α_{124} = (1 3)(2)(4)(5)(6)

α_{125} = (1 2)(3)(4)(5)(6)

α_{126} = (1 2)(3)(4 5 6)

α_{127} = (1 2)(3)(4 6 5)

α_{128} = (1 3)(4)(2 5 6)

α_{129} = (1 3)(4)(2 6 5)

α_{130} = (1 4)(5)(2 3 6)

α_{131} = (1 4)(5)(2 6 3)

α_{132} = (1 5)(6)(2 3 4)

α_{133} = (1 5)(6)(2 4 3)

α_{134} = (1 6)(2)(3 4 5)

α_{135} = (1 6)(2)(3 5 4)

α_{136} = (1 4)(2)(3)(5 6)

α_{137} = (1 5)(2)(3)(4 6)

α_{138} = (1 6)(2)(3)(4 5)

α_{139} = (1 3)(2)(4)(5 6)

α_{140} = (1 5)(2)(4)(3 6)

α_{141} = (1 6)(2)(4)(3 5)

α_{142} = (1 3)(2)(5)(4 6)

α_{143} = (1 4)(2)(5)(3 6)

α_{144} = (1 6)(2)(5)(3 4)

α_{145} = (1 3)(2)(6)(4 5)

α_{146} = (1 4)(2)(6)(3 5)

α_{147} = (1 5)(2)(6)(3 4)

α_{148} = (1 2)(3)(4)(5 6)

α_{149} = (1 5)(3)(4)(2 6)

α_{150} = (1 6)(3)(4)(2 5)

α_{151} = (1 2)(3)(5)(4 6)

α_{152} = (1 4)(3)(5)(2 6)

α_{153} = (1 6)(3)(5)(2 4)

α_{154} = (1 2)(3)(6)(4 5)

α_{155} = (1 4)(3)(6)(2 5)

α_{156} = (1 5)(3)(6)(2 4)

α_{157} = (1 2)(4)(5)(3 6)

α_{158} = (1 3)(4)(5)(2 6)

α_{159} = (1 6)(4)(5)(2 3)

α_{160} = (1 2)(4)(6)(3 5)

α_{161} = (1 3)(4)(6)(2 5)

α_{162} = (1 5)(4)(6)(2 3)

$\alpha_{163} = (1\ 2)(5)(6)(3\ 4)$

$\alpha_{164} = (1\ 3)(5)(6)(2\ 4)$

$\alpha_{165} = (1\ 4)(5)(6)(2\ 3)$

$\alpha_{166} = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$

$\alpha_{167} = (1\ 2)(3\ 4\ 6\ 5)$

$\alpha_{168} = (1\ 2)(3\ 5\ 4\ 6)$

$\alpha_{169} = (1\ 2)(3\ 5\ 6\ 4)$

$\alpha_{170} = (1\ 2)(3\ 6\ 4\ 5)$

$\alpha_{171} = (1\ 2)(3\ 6\ 5\ 4)$

$\alpha_{172} = (1\ 3)(2\ 4\ 5\ 6)$

$\alpha_{173} = (1\ 3)(2\ 4\ 6\ 5)$

$\alpha_{174} = (1\ 3)(2\ 5\ 4\ 6)$

$\alpha_{175} = (1\ 3)(2\ 5\ 6\ 4)$

$\alpha_{176} = (1\ 3)(2\ 6\ 4\ 5)$

$\alpha_{177} = (1\ 3)(2\ 6\ 5\ 4)$

$\alpha_{178} = (1\ 4)(2\ 3\ 5\ 6)$

$\alpha_{179} = (1\ 4)(2\ 3\ 6\ 5)$

$\alpha_{180} = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$

$\alpha_{181} = (1\ 4)(2\ 5\ 6\ 3)$

$\alpha_{182} = (1\ 4)(2\ 6\ 3\ 5)$

$\alpha_{183} = (1\ 4)(2\ 6\ 5\ 3)$

$\alpha_{184} = (1\ 5)(2\ 3\ 4\ 6)$

$\alpha_{185} = (1\ 5)(2\ 3\ 6\ 4)$

$\alpha_{186} = (1\ 5)(2\ 4\ 3\ 6)$

$\alpha_{187} = (1\ 5)(2\ 4\ 6\ 3)$

$\alpha_{188} = (1\ 5)(2\ 6\ 3\ 4)$

$\alpha_{189} = (1\ 5)(2\ 6\ 4\ 3)$

$\alpha_{190} = (1\ 6)(2\ 3\ 4\ 5)$

$\alpha_{191} = (1\ 6)(2\ 3\ 5\ 4)$

$\alpha_{192} = (1\ 6)(2\ 4\ 3\ 5)$

$\alpha_{193} = (1\ 6)(2\ 4\ 5\ 3)$

$\alpha_{194} = (1\ 6)(2\ 5\ 3\ 4)$

$\alpha_{195} = (1\ 6)(2\ 5\ 4\ 3)$

$\alpha_{196} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\alpha_{197} = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\alpha_{198} = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$

$\alpha_{199} = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$

$\alpha_{200} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$

$\alpha_{201} = (1\ 3)(2\ 6)(4\ 5)$

$\alpha_{202} = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

$\alpha_{203} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\alpha_{204} = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$

$\alpha_{205} = (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6)$

$\alpha_{206} = (1\ 5)(2\ 4)(3\ 6)$

$\alpha_{207} = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$

$\alpha_{208} = (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5)$

$\alpha_{209} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$

$\alpha_{210} = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$

$\alpha_{211} = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

$\alpha_{212} = (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6)$

$\alpha_{213} = (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5)$

$\alpha_{214} = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$

$\alpha_{215} = (1\ 5)(2\ 4)(3\ 6)$

$\alpha_{216} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$

$\alpha_{217} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$

$\alpha_{218} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\alpha_{219} = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$

$\alpha_{220} = (1\ 3)(2\ 6)(4\ 5)$

$\alpha_{221} = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$

$\alpha_{222} = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$

$\alpha_{223} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\alpha_{224} = (1\ 5)(3\ 4)(2\ 6)$

$\alpha_{225} = (1\ 6)(3\ 4)(2\ 5)$

$\alpha_{226} = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\alpha_{227} = (1\ 4)(3\ 5)(2\ 6)$

$\alpha_{228} = (1\ 6)(3\ 5)(2\ 4)$

$\alpha_{229} = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$

$\alpha_{230} = (1\ 4)(3\ 6)(2\ 5)$

$\alpha_{231} = (1\ 5)(3\ 6)(2\ 4)$

$\alpha_{232} = (1\ 2)(4\ 5)(3\ 6)$

$\alpha_{233} = (1\ 3)(4\ 5)(2\ 6)$

$\alpha_{234} = (1\ 6)(4\ 5)(2\ 3)$

$\alpha_{235} = (1\ 2)(4\ 6)(3\ 5)$

$\alpha_{236} = (1\ 3)(4\ 6)(2\ 5)$

$\alpha_{237} = (1\ 5)(4\ 6)(2\ 3)$

$\alpha_{238} = (1\ 2)(5\ 6)(3\ 4)$

$\alpha_{239} = (1\ 3)(5\ 6)(2\ 4)$

$\alpha_{240} = (1\ 4)(5\ 6)(2\ 3)$

Kesimpulan:

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya bukan merupakan **automorfisme**, karena:

Graf $K_{1,n}$ memiliki $n + 1$ titik, dimana $V(K_{1,n}) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_{n+1})$

$deg_G(v_1) = v_n$

$deg_G(v_i) = 1$ dengan $i \neq 1$

Misalkan,

$f(v_1) = v_i$ dengan k ≠ 1

$\downarrow \qquad \downarrow$

$n \qquad 1$ jadi, $n \neq 1$ maka tidak mengawetkan derajat titik.

Sehingga, untuk fungsi yang berbentuk $(1\,.)(..)(..)$ pada $K_{1,n}$bukan merupakan automorfisme karena tidak mengawetkan derajat titik.

3.1.5 Graf Bintang-6 ($K_{1,6}$)

Himpunan titik pada graf bintang-6 dimisalkan sebagai $V(K_{1,6})$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Diberikan suatu fungsi dari bintang-6 pada dirinya sendiri yaitu α : $K_{1,6} \rightarrow K_{1,6}$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi α yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari bintang-6 kepada dirinya sendiri sebanyak 5040 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme dengan bentuk fungsi (1) (. . . . . .) adalah sebanyak 120 fungsi, yaitu:

α_1 = (1) (2 3 4 5 6 7)

α_2 = (1) (2 3 4 5 7 6)

α_3 = (1) (2 3 4 6 5 7)

α_4 = (1) (2 3 4 6 7 5)

α_5 = (1) (2 3 4 7 5 6)

α_6 = (1) (2 3 4 7 6 5)

α_7 = (1) (2 3 5 4 6 7)

α_8 = (1) (2 3 5 4 7 6)

α_9 = (1) (2 3 5 6 4 7)

α_{10} = (1) (2 3 5 6 7 4)

α_{11} = (1) (2 3 5 7 4 6)

α_{12} = (1) (2 3 5 7 6 4)

α_{13} = (1) (2 3 6 4 5 7)

α_{14} = (1) (2 3 6 4 7 5)

α_{15} = (1) (2 3 6 5 4 7)

α_{16} = (1) (2 3 6 5 7 4)

α_{17} = (1) (2 3 6 7 4 5)

α_{18} = (1) (2 3 6 7 5 4)

α_{19} = (1) (2 3 7 4 5 6)

α_{20} = (1) (2 3 7 4 6 5)

α_{21} = (1) (2 3 7 5 4 6)

α_{22} = (1) (2 3 7 5 6 4)

α_{61} = (1) (2 5 6 3 4 7)

α_{62} = (1) (2 5 6 3 7 4)

α_{63} = (1) (2 5 6 4 3 7)

α_{64} = (1) (2 5 6 4 7 3)

α_{65} = (1) (2 5 6 7 3 4)

α_{66} = (1) (2 5 6 7 4 3)

α_{67} = (1) (2 5 7 3 4 6)

α_{68} = (1) (2 5 7 3 6 4)

α_{69} = (1) (2 5 7 4 3 6)

α_{70} = (1) (2 5 7 4 6 3)

α_{71} = (1) (2 5 7 6 3 4)

α_{72} = (1) (2 5 7 6 4 3)

α_{73} = (1) (2 6 3 4 5 7)

α_{74} = (1) (2 6 3 4 7 5)

α_{75} = (1) (2 6 3 5 4 7)

α_{76} = (1) (2 6 3 5 7 4)

α_{77} = (1) (2 6 3 7 4 5)

α_{78} = (1) (2 6 3 7 5 4)

α_{79} = (1) (2 6 4 3 5 7)

α_{80} = (1) (2 6 4 3 7 5)

α_{81} = (1) (2 6 4 5 3 7)

α_{82} = (1) (2 6 4 5 7 3)

α_{23} = (1) (2 3 7 6 4 5)

α_{24} = (1) (2 3 7 6 5 4)

α_{25} = (1) (2 4 3 5 6 7)

α_{26} = (1) (2 4 3 5 7 6)

α_{27} = (1) (2 4 3 6 5 7)

α_{28} = (1) (2 4 3 6 7 5)

α_{29} = (1) (2 4 3 7 5 6)

α_{30} = (1) (2 4 3 7 6 5)

α_{31} = (1) (2 4 5 3 6 7)

α_{32} = (1) (2 4 5 3 7 6)

α_{33} = (1) (2 4 5 6 3 7)

α_{34} = (1) (2 4 5 6 7 3)

α_{35} = (1) (2 4 5 7 3 6)

α_{36} = (1) (2 4 5 7 6 3)

α_{37} = (1) (2 4 6 3 5 7)

α_{38} = (1) (2 4 6 3 7 5)

α_{39} = (1) (2 4 6 5 3 7)

α_{40} = (1) (2 4 6 5 7 3)

α_{41} = (1) (2 4 6 7 3 5)

α_{42} = (1) (2 4 6 7 5 3)

α_{43} = (1) (2 4 7 3 5 6)

α_{44} = (1) (2 4 7 3 6 5)

α_{83} = (1) (2 6 4 7 3 5)

α_{84} = (1) (2 6 4 7 5 3)

α_{85} = (1) (2 6 5 3 4 7)

α_{86} = (1) (2 6 5 3 7 4)

α_{87} = (1) (2 6 5 4 3 7)

α_{88} = (1) (2 6 5 4 7 3)

α_{89} = (1) (2 6 5 7 3 4)

α_{90} = (1) (2 6 5 7 4 3)

α_{91} = (1) (2 6 7 3 4 5)

α_{92} = (1) (2 6 7 3 5 4)

α_{93} = (1) (2 6 7 4 3 5)

α_{94} = (1) (2 6 7 4 5 3)

α_{95} = (1) (2 6 7 5 3 4)

α_{96} = (1) (2 6 7 5 4 3)

α_{97} = (1) (2 7 3 4 5 6)

α_{98} = (1) (2 7 3 4 6 5)

α_{99} = (1) (2 7 3 5 4 6)

α_{100} = (1) (2 7 3 5 6 4)

α_{101} = (1) (2 7 3 6 4 5)

α_{102} = (1) (2 7 3 6 5 4)

α_{103} = (1) (2 7 4 3 5 6)

α_{104} = (1) (2 7 4 3 6 5)

α_{45} = (1) (2 4 7 5 3 6) α_{105} = (1) (2 7 4 5 3 6)

α_{46} = (1) (2 4 7 5 6 3) α_{106} = (1) (2 7 4 5 6 3)

α_{47} = (1) (2 4 7 6 3 5) α_{107} = (1) (2 7 4 6 3 5)

α_{48} = (1) (2 4 7 6 5 3) α_{108} = (1) (2 7 4 6 5 3)

α_{49} = (1) (2 5 3 4 6 7) α_{109} = (1) (2 7 5 3 4 6)

α_{50} = (1) (2 5 3 4 7 6) α_{110} = (1) (2 7 5 3 6 4)

α_{51} = (1) (2 5 3 6 4 7) α_{111} = (1) (2 7 5 4 3 6)

α_{52} = (1) (2 5 3 6 7 4) α_{112} = (1) (2 7 5 4 6 3)

α_{53} = (1) (2 5 3 7 4 6) α_{113} = (1) (2 7 5 6 3 4)

α_{54} = (1) (2 5 3 7 6 4) α_{114} = (1) (2 7 5 6 4 3)

α_{55} = (1) (2 5 4 3 6 7) α_{115} = (1) (2 7 6 3 4 5)

α_{56} = (1) (2 5 4 3 7 6) α_{116} = (1) (2 7 6 3 5 4)

α_{57} = (1) (2 5 4 6 3 7) α_{117} = (1) (2 7 6 4 3 5)

α_{58} = (1) (2 5 4 6 7 3) α_{118} = (1) (2 7 6 4 5 3)

α_{59} = (1) (2 5 4 7 3 6) α_{119} = (1) (2 7 6 5 3 4)

α_{60} = (1) (2 5 4 7 6 3) α_{120} = (1) (2 7 6 5 4 3)

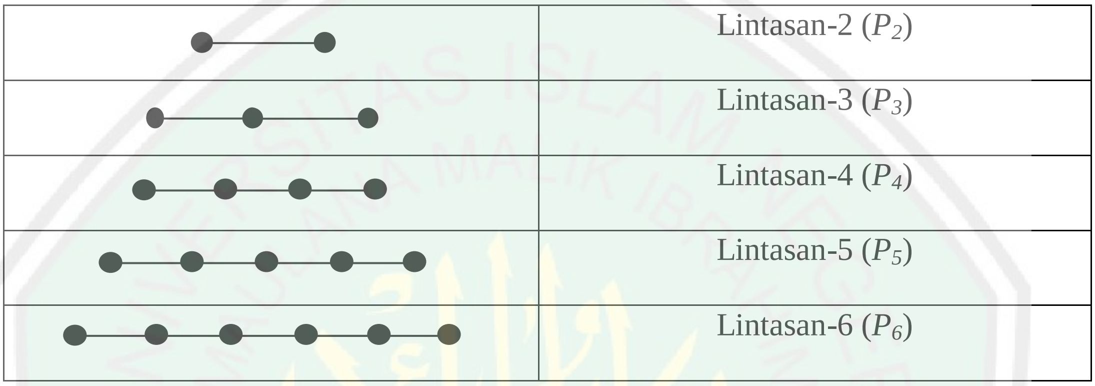
Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, dengan selalu $\alpha(v_1) = v_1$, sehingga bayangan titik $v_i(i\neq 1)$ oleh fungsi α juga tetap terhubung dengan titik pusat, dengan kata lain bahwa $(v_1,v_j) \in E(K_{1,6}) \rightarrow (\alpha(v_1),\alpha(v_j)) \in E(K_{1,6})$ dengan $j\neq 1$. Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari bintang-6 ke dirinya sendiri dengan bentuk fungsi (1) (. . . . . .) adalah sebanyak 120 fungsi.

3.2 Automorfisme pada Graf Lintasan

Misalkan graf lintasan (P_n) dengan himpunan titik

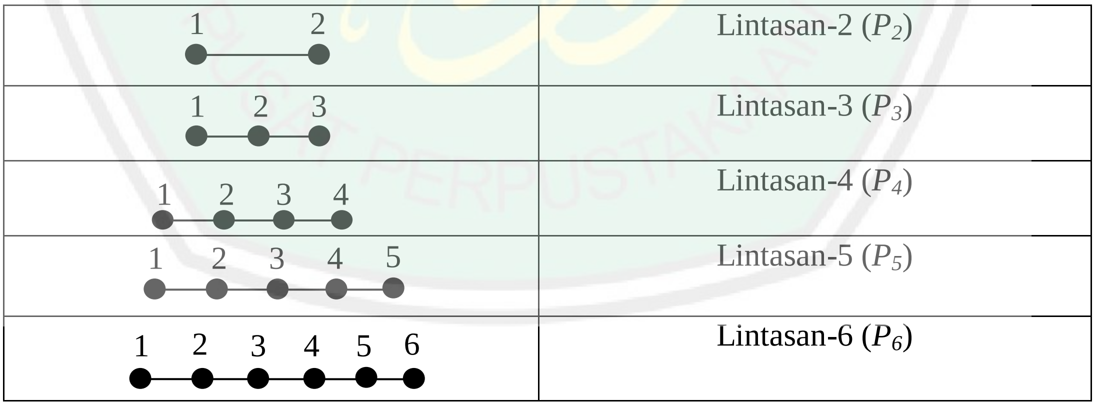
$$V(P_n) = (1, 2, 3, \dots, n)$$

Beberapa graf lintasan diberikan seperti berikut:



Gambar 3.29 Graf Lintasan-2, Graf Lintasan-3, Graf Lintasan-4, Graf Lintasan-5, Graf Lintasan-6

Selanjutnya akan diberikan label untuk masing-masing titik pada graf-graf tersebut seperti berikut ini:



Gambar 3.30 Graf Lintasan-2, Graf Lintasan-3, Graf Lintasan-4, Graf Lintasan-5, Graf Lintasan-6 dengan Label Titik

Kemudian akan ditentukan automorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf tersebut. Langkah ini dimulai dari graf lintasan-2 sebagai berikut:

3.2.1 Graf Lintasan-2 (P_2)

Graf lintasan-2 yang titik-titiknya diberi label berikut:

Gambar 3.31 Graf Lintasan-2 (P_2)

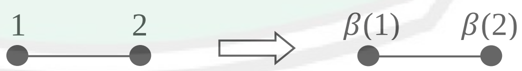
Himpunan titik pada graf lintasan-2 dimisalkan sebagai $V(P_2) = \{1,2\}$. Diberikan suatu fungsi dari lintasan-2 pada dirinya sendiri yaitu β: $P_2 \rightarrow P_2$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi β yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari lintasan-2 kepada dirinya sendiri sebanyak 2 fungsi. Dari fungsi-fungsi tersebut semuanya adalah automorfisme, fungsi tersebut yaitu:

1. $\beta_1 = (1)(2)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$ dan $\beta_1(2) = 2$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2
$\beta(v_i)$	1	2

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.32 Graf Lintasan-2 (P_2) dengan $\beta_1 = (1)(2)$

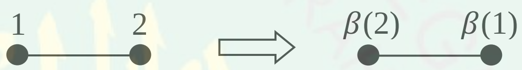
Fungsi $\beta_1 = (1)(2)$ adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi $(1,2) \in E(P_2)$ maka $\beta(1,2) = (1,2) \in E(P_2)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf tersebut. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

2. $\beta_2 = (1\ \ 2)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 2$ dan $\beta_2(2) = 1$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2
$\beta(v_i)$	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

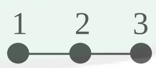


Gambar 3.33 Graf Lintasan-2 (P_2) dengan $\beta_2 = (1\ \ 2)$

Fungsi $\beta_2 = (1\ \ 2)$ adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,2) \in E(P_2)$ maka $(\beta(1), \beta(2)) = (2,1)$ terdapat pada graf tersebut, $[(\beta(1), \beta(2)) = (2,1) \in E(P_2)]$.

3.2.2 Graf Lintasan-3 (P_3)

Graf lintasan-3 yang titik-titiknya diberi label berikut:



Gambar 3.34 Graf Lintasan-3 (P_3)

Himpunan titik pada graf lintasan-3 dimisalkan sebagai $V(P_3) = \{1, 2, 3\}$. Diberikan suatu fungsi dari lintasan-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta : P_3 \to P_3$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi β yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari lintasan-3 kepada dirinya sendiri sebanyak 6 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 2 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

1. β_1= (1)(2)(3)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$; $\beta_1(2) = 2$ dan $\beta_1(3) = 3$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	1	2	3

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.35 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_1= (1)(2)(3)

   Fungsi β_1 = (1)(2)(3) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,3) $\in E(P_3)$ maka $(\beta(1),\beta(3)) = (1,3) \in E(P_3)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,3) pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi (1,2) dan (2,3) $\in E(P_3)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_1 juga ada di $E(P_3)$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

2. β_2 = (1 3)(2)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 3$; $\beta_2(2) = 2$ dan $\beta_2(3) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.36 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_2 =(1 3)(2)

Fungsi β_2 = (1 3)(2) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_3)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (3,2) terdapat pada graf itu sendiri, $[(\beta(1),\beta(2)) = (3,2) \in E(P_3)]$. Begitu pula untuk sisi (1,2) dan (2,3) $\in E(P_3)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_2 juga ada di $E(P_3)$.

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, karena pada graf lintasan-3 ini titik-titiknya terhubung langsung hanya pada dua titik (kecuali titik ujung). Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari lintasan-3 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

b. Beberapa fungsi yang bukan automorfisme:

1. β_3= (1)(2 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 1$; $\beta_3(2) = 3$ dan $\beta_3(3) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	1	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.37 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_3= (1)(2 3)

Fungsi β_3= (1)(2 3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_3)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (1,3) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, $[(\beta(1),\beta(2))$ = (1,3) $\notin E(P_3)]$.

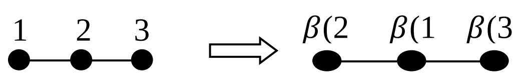
2. β_4= (1 2) (3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_4(1) = 2$; $\beta_4(2) = 1$ dan $\beta_4(3) = 3$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	2	1	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

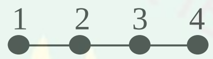


Gambar 3.38 Graf Lintasan-3 (P_3) dengan β_4= (1 2) (3)

Fungsi β_4 = (1 2) (3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (2,3) $\in E(P_3)$ maka $(\beta(2),\beta(3))$ = (1,3) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(2),\beta(3)) = (1,3) \notin E(P_3)]$.

3.2.3 Graf Lintasan-4 (P_4)

Graf lintasan-4 yang titik-titiknya diberi label berikut:



Gambar 3.39 Graf Lintasan-4 (P_4)

Himpunan titik pada graf lintasan-4 dimisalkan sebagai $V(P_4)$ = {1, 2, 3, 4}. Diberikan suatu fungsi dari lintasan-4 pada dirinya sendiri yaitu $\beta: P_4 \rightarrow P_4$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi β yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari lintasan-4 kepada dirinya sendiri sebanyak 24 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 2 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

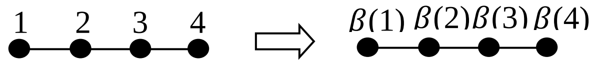
1. β_1= (1)(2)(3)(4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$; $\beta_1(2) = 2$; $\beta_1(3) = 3$ dan $\beta_1(4) = 4$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	1	2	3	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.40 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_1= (1)(2)(3)(4)

Fungsi β_1 = (1)(2)(3)(4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,2) $\in E(P_4)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (1,2) $\in E(P_4)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi (2,3) dan (3,4) $\in E(P_4)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_1 juga ada di $E(P_4)$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

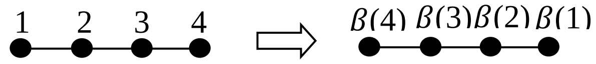
2. β_2 = (1 4)(2 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 4$; $\beta_2(2) = 3$; $\beta_2(3) = 2$ dan $\beta_2(4) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	4	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.41 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_2 = (1 4)(2 3)

Fungsi β_2 = (1 4)(2 3) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_4)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (4,3) terdapat pada graf itu sendiri, $[(\beta(1),\beta(2)) = (4,3) \in E(P_4)]$.

Begitu pula untuk sisi (2,3) dan (3,4) $\in E(P_4)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_2 juga ada di $E(P_4)$.

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, karena pada graf lintasan-4 ini titik-titiknya terhubung langsung hanya pada dua titik (kecuali titik ujung). Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari lintasan-4 pada dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

b. Fungsi-fungsi yang bukan automorfisme:

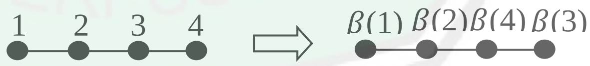
1. $\beta_3 = (1)(2)(3\ 4)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 1$; $\beta_3(2) = 2$; $\beta_3(3) = 4$ dan $\beta_3(4) = 3$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	1	2	4	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.42 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan $\beta_3 = (1)\ (2)\ (3\ 4)$

Fungsi $\beta_3 = (1)(2)(3\ 4)$ adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(2,3) \in E(P_4)$ maka $(\beta(2),\beta(3)) = (2,4)$ tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(2),\beta(3)) = (2,4) \notin E(P_4)]$.

2. $\beta_4 = (1)(3)(2\ 4)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_4(1) = 1$; $\beta_4(2) = 4$; $\beta_4(3) = 3$ dan $\beta_4(4) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	1	4	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.43 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan $\beta_4 = (1)\ (3)\ (2\ 4)$

Fungsi $\beta_4 = (1)(3)(2\ 4)$ adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,2) \in E(P_4)$ maka $(\beta(1),\beta(2)) = (1,4)$ tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(1),\beta(2)) = (1,4) \notin E(P_4)]$.

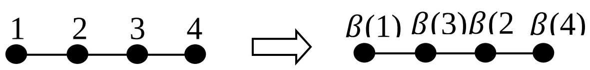
3. $\beta_5 = (1)(4)(2\ 3)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_5(1) = 1$; $\beta_5(2) = 3$; $\beta_5(3) = 2$ dan $\beta_5(4) = 4$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	1	3	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.44 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_5 = (1)(4)(2 3)

Fungsi β_5 = (1)(4)(2 3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_4)$ maka (β(1),β(2)) = (1,3) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, [(β(1),β(2)) = (1,3) $\notin E(P_4)$].

4. β_6 = (2)(3)(1 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_6(1) = 4$; $\beta_6(2) = 2$; $\beta_6(3) = 3$ dan $\beta_6(4) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	4	2	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.45 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_6 = (2)(3)(1 4)

Fungsi β_6 = (2)(3)(1 4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_4)$ maka (β(1),β(2)) = (4,2) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, [(β(1),β(2)) = (4,2) $\notin E(P_4)$].

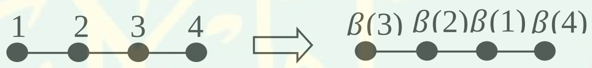
5. β_7 = (2)(4)(1 3)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_7(1) = 3$; $\beta_7(2) = 2$; $\beta_7(3) = 1$ dan $\beta_7(4) = 4$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	3	2	1	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.46 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan $\beta_7 = (2)(4)(1\ 3)$

Fungsi $\beta_7 = (2)(4)(1\ 3)$ adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(3,4) \in E(P_4)$ maka $(\beta(3),\beta(4)) = (1,4)$ tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(3),\beta(4)) = (1,4) \notin E(P_4)]$.

6. $\beta_8 = (3)(4)(1\ 2)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_8(1) = 2$; $\beta_8(2) = 1$; $\beta_8(3) = 3$ dan $\beta_8(4) = 4$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4

$\beta(v_i)$	2	1	3	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.47 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_8 = (3)(4)(1 2)

Fungsi β_8 = (3)(4)(1 2) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (2,3) $\in$ $E(P_4)$ maka (β(2),β(3)) = (1,3) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, [(β(2),β(3)) = (1,3) $\notin$ $E(P_4)$].

7. β_9 = (1 2)(3 4)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa β_9(1) = 2 ; β_9(2) = 1 ; β_9(3) = 4 dan β_9(4) = 3

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	2	1	4	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.48 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_9 = (1 2) (3 4)

Fungsi β_9 = (1 2)(3 4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (2,3) $\in$ $E(P_4)$ maka

$(\beta(2),\beta(3))$ = (1,4) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(2),\beta(3)) = (1,4) \notin E(P_4)]$.

8. $\beta_{10} = (1\ 3)(2\ 4)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_{10}(1) = 3$; $\beta_{10}(2) = 4$; $\beta_{10}(3) = 1$ dan $\beta_{10}(4) = 2$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	3	4	1	2

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.49 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan $\beta_{10} = (1\ 3)(2\ 4)$

   Fungsi β_{10} = (1 3) (2 4) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(2,3) \in E(P_4)$ maka $(\beta(2),\beta(3))$ = (4,1) tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(2),\beta(3)) = (4,1) \notin E(P_4)]$.

9. $\beta_{11} = (1\ 2\ 4\ 3)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_{11}(1) = 2$; $\beta_{11}(2) = 4$; $\beta_{11}(3) = 1$ dan $\beta_{11}(4) = 3$

   atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4

$\beta(v_i)$	2	4	1	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.50 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_{11} = (1 2 4 3)

Fungsi β_{11} = (1 2 4 3) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_4)$ maka ($\beta(1)$,$\beta(2)$) = (2,4) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, [($\beta(1)$,$\beta(2)$) = (2,4) $\notin E(P_4)$].

10. β_{12} = (1 3 4 2)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_{12}(1) = 3$; $\beta_{12}(2) = 1$; $\beta_{12}(3) = 4$ dan $\beta_{12}(4) = 2$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\beta(v_i)$	3	1	4	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.51 Graf Lintasan-4 (P_4) dengan β_{12} = (1 3 4 2)

Fungsi β_{12} = (1 3 4 2) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_4)$ maka

$(\beta(1),\beta(2)) = (3,1)$ tidak terdapat sisi pada graf tersebut, $[(\beta(1),\beta(2)) = (3,1) \notin E(P_4)]$.

3.2.4 Graf Lintasan-5 (P_5)

Graf lintasan-5 yang titik-titiknya diberi label berikut:

Gambar 3.52 Graf Lintasan-5 (P_5)

Himpunan titik pada graf lintasan-5 dimisalkan sebagai $V(P_5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Diberikan suatu fungsi dari lintasan-5 pada dirinya sendiri yaitu β: $P_5 \rightarrow P_5$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi β yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari lintasan-5 kepada dirinya sendiri sebanyak 120 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 2 fungsi, yaitu:

a. **Fungsi-fungsi yang automorfisme:**

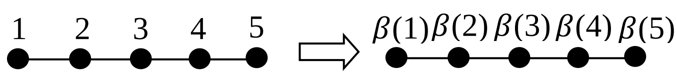
1. $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$; $\beta_1(2) = 2$; $\beta_1(3) = 3$; $\beta_1(4) = 4$ dan $\beta_1(5) = 5$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\beta(v_i)$	1	2	3	4	5

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.53 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan β_1 = (1)(2)(3)(4)(5)

Fungsi β_1 = (1)(2)(3)(4)(5) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,2) $\in E(P_5)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (1,2) $\in E(P_5)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf hasil fungsi tersebut. Begitu pula untuk sisi (2,3),(3,4),(4,5) $\in E(P_5)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_1 juga ada di $E(P_5)$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

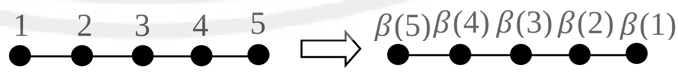
2. β_2 = (3)(1 5)(2 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 5$; $\beta_2(2) = 4$; $\beta_2(3) = 3$; $\beta_2(4) = 2$ dan $\beta_2(5) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\beta(v_i)$	5	4	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.54 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan β_2 =(3)(1 5)(2 4)

Fungsi β_2= (3)(1 5)(2 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(P_5)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (5,4) terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\beta(1),\beta(2))$ = (5,4)

$\in E(P_5)$]. Begitu pula untuk sisi (2,3),(3,4),(4,5) $\in$ $E(P_5)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_2 juga ada di $E(P_5)$.

Dari fungsi-fungsi tersebut, semuanya adalah **automorfisme**, karena pada graf lintasan-5 ini titik-titiknya terhubung langsung hanya pada dua titik (kecuali titik ujung). Kesimpulannya, banyaknya automorfisme dari lintasan-5 pada dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

b. **Beberapa fungsi yang bukan automorfisme:**

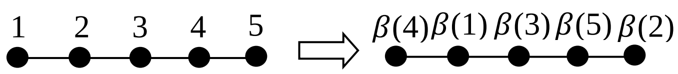
1. $\beta_3 = (3)(1\ 2\ 5\ 4)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 2$; $\beta_3(2) = 5$; $\beta_3(3) = 3$; $\beta_3(4) = 1$ dan $\beta_3(5) = 4$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\beta(v_i)$	2	5	3	1	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.55 Graf Lintasan-5 (P_5) dengan $\beta_3 = (3)(1\ 2\ 5\ 4)$

Fungsi $\beta_3 = (3)(1\ 2\ 5\ 4)$ adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in$ $E(P_5)$ maka $(\beta(1),\beta(2)) =$

(2,5) tidak terdapat sisi pada graf itu sendiri, $[(\beta(1),\beta(2)) = (2,5) \notin E(P_5)]$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu:

$\beta_4 = (3)\ (1\ 4\ 5\ 2)$

$\beta_5 = (1)\ (2)\ (3)\ (4\ 5)$

$\beta_6 = (1)\ (2)\ (4)\ (3\ 5)$

$\beta_7 = (1)\ (2)\ (5)\ (3\ 4)$

$\beta_8 = (1)\ (3)\ (4)\ (2\ 5)$

$\beta_9 = (1)\ (3)\ (5)\ (2\ 4)$

$\beta_{10} = (1)\ (4)\ (5)\ (2\ 3)$

$\beta_{11} = (2)\ (3)\ (4)\ (1\ 5)$

$\beta_{12} = (2)\ (3)\ (5)\ (1\ 4)$

$\beta_{13} = (2)\ (4)\ (5)\ (1\ 3)$

$\beta_{14} = (3)\ (4)\ (5)\ (1\ 2)$

$\beta_{15} = (1)\ (2\ 3)\ (4\ 5)$

$\beta_{16} = (1)\ (2\ 4)\ (3\ 5)$

$\beta_{17} = (1)\ (2\ 5)\ (3\ 4)$

$\beta_{18} = (2)\ (1\ 3)\ (4\ 5)$

$\beta_{19} = (2)\ (1\ 4)\ (3\ 5)$

$\beta_{20} = (2)\ (1\ 5)\ (3\ 4)$

$\beta_{21} = (3)\ (1\ 2)\ (4\ 5)$

$\beta_{22} = (3)\ (1\ 4)\ (2\ 5)$

β_{23} = (3) (1 5) (2 4)

β_{24} = (4) (1 2) (3 5)

β_{25} = (4) (1 3) (2 5)

β_{26} = (4) (1 5) (2 3)

β_{27} = (5) (1 2) (3 4)

β_{28} = (5) (1 3) (2 4)

β_{29} = (5) (1 4) (2 3)

3.2.5 Graf Lintasan-6 (P_6)

Graf lintasan-6 yang titik-titiknya diberi label berikut:

Gambar 3.56 Graf Lintasan-6 (P_6)

Himpunan titik pada graf lintasan-6 dimisalkan sebagai $V(P_6)$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Diberikan suatu fungsi dari lintasan-6 pada dirinya sendiri yaitu β: $P_6 \rightarrow P_6$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi β yang 1-1 dan onto yang berbentuk permutasi dari lintasan-6 kepada dirinya sendiri sebanyak 720 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan automorfisme adalah sebanyak 2 fungsi, yaitu:

a. Fungsi-fungsi yang automorfisme:

1. β_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$; $\beta_1(2) = 2$; $\beta_1(3) = 3$; $\beta_1(4) = 4$; $\beta_1(5) = 5$ dan $\beta_1(6) = 6$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	1	2	3	4	5	6

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai

Gambar 3.57 Graf Lintasan-6(P_6) dengan β_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)

Fungsi β_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi $(1,2) \in E(P_6)$ maka $(\beta(1),\beta(2)) = (1,2) \in E(P_6)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi $(2,3),(3,4),(4,5),(5,6) \in E(P_6)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_1 juga ada di $E(P_6)$. Jadi, fungsi identitas adalah automorfisme.

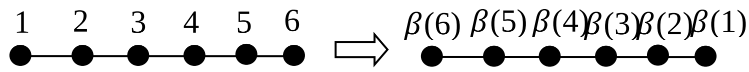
2. $\beta_2 = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 6$; $\beta_2(2) = 5$; $\beta_2(3) = 4$; $\beta_2(4) = 3$; $\beta_2(5) = 2$ dan $\beta_2(6) = 1$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	6	5	4	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.58 Graf Lintasan-6(P_6) dengan β_2 = (1 6)(2 5)(3 4)

Fungsi β_2= (1 6)(2 5)(3 4) adalah automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,2) $\in E(P_6)$ maka $(\beta(1),\beta(2))$ = (6,5) $\in E(P_6)$ (*kodomain*), artinya terdapat sisi (1,2) pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi (2,3),(3,4),(4,5),(5,6) $\in E(P_6)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh β_2 juga ada di $E(P_6)$.

Kesimpulan:

Fungsi-fungsi di atas merupakan automorfisme, dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Untuk n genap, permutasi yang terjadi adalah:

$$f(v_1) = v_n$$

$$f(v_2) = v_{n-1}$$

$$f(v_3) = v_{n-2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$f(v_{n-1}) = 2$$

$$f(v_n) = 1$$

Sehingga, dapat ditentukan permutasi dari n genap, yaitu:

$$(v_1 \;\; v_n)(v_2 \;\; v_{n-1})(v_3 \;\; v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}} \;\; v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

b. Untuk n ganjil, permutasi yang terjadi adalah:

$$f(v_1) = v_n$$

$$f(v_2) = v_{n-1}$$

$$f(v_3) = v_{n-2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$f(v_{n-1}) = 2$$

$$f(v_n) = 1$$

Sehingga, dapat ditentukan permutasi dari n ganjil, yaitu:

$$(v_1 \;\; v_n)(v_2 \;\; v_{n-1})(v_3 \;\; v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} \;\; v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

b. Beberapa fungsi yang bukan automorfisme:

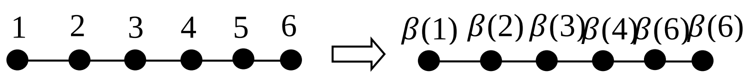
1. β_3 = (1)(2)(3)(4)(5 6)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 1$; $\beta_3(2) = 2$; $\beta_3(3) = 3$; $\beta_3(4) = 4$; $\beta_3(5) = 6$ dan $\beta_3(6) = 5$

atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	1	2	3	4	6	5

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.59 Graf Lintasan-6 (P_6) dengan β_3 = (1)(2)(3)(4)(5 6)

Fungsi β_3 = (1)(2)(3)(4)(5 6) adalah bukan automorfisme karena pada graf awalnya (*domain*) dapat diperlihatkan bahwa sisi (1,3) $\in E(P_6)$

maka $(\beta(1),\beta(3)) = (1,3) \notin E(P_6)$ (*kodomain*), artinya tidak terdapat sisi (1,3) pada graf itu sendiri.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu:

β_4= (1)(2)(3)(5)(4 6)	β_{41} = (2)(5)(1 6)(3 4)
β_5= (1)(2)(3)(6)(4 5)	β_{42} = (2)(6)(1 3)(4 5)
β_6= (1)(2)(4)(5)(3 6)	β_{43} = (2)(6)(1 4)(3 5)
β_7= (1)(2)(4)(6)(3 5)	β_{44} = (2)(6)(1 5)(3 4)
β_8= (1)(2)(5)(6)(3 4)	β_{45} = (3)(4)(1 2)(5 6)
β_9= (1)(3)(4)(5)(2 6)	β_{46} = (3)(4)(1 5)(2 6)
β_{10}= (1)(3)(4)(6)(2 5)	β_{47} = (3)(4)(1 6)(2 5)
β_{11}= (1)(3)(5)(6)(2 4)	β_{48} = (3)(5)(1 2)(4 6)
β_{12}= (1)(4)(5)(6)(23)	β_{49} = (3)(5)(1 4)(2 6)
β_{13}= (2)(3)(4)(5)(1 6)	β_{50} = (3)(5)(1 6)(2 4)
β_{14}= (2)(3)(4)(6)(1 5)	β_{51} = (3)(6)(1 2)(4 5)
β_{15}= (2)(3)(5)(6)(1 4)	β_{52} = (3)(6)(1 4)(2 5)
β_{16}= (2)(4)(5)(6)(1 3)	β_{53} = (3)(6)(1 5)(2 4)
β_{17}= (3)(4)(5)(6)(1 2)	β_{54} = (4)(5)(1 2)(3 6)
β_{18}= (1)(2)(3 4)(5 6)	β_{55} = (4)(5)(1 3)(2 6)
β_{19}= (1)(2)(3 5)(4 6)	β_{56} = (4)(5)(1 6)(2 3)
β_{20}= (1)(2)(3 6)(4 5)	β_{57} = (4)(6)(1 2)(3 5)
β_{21}= (1)(3)(2 4)(5 6)	β_{58} = (4)(6)(1 3)(2 5)
β_{22}= (1)(3)(2 5)(4 6)	β_{59} = (4)(6)(1 5)(2 3)

β_{23}= (1)(3)(2 6)(4 5)	β_{60} = (5)(6)(1 2)(3 4)
β_{24}= (1)(4)(2 3)(5 6)	β_{61} = (5)(6)(1 3)(2 4)
β_{25}= (1)(4)(2 5)(3 6)	β_{62} = (5)(6)(1 4)(2 3)
β_{26}= (1)(4)(2 6)(3 5)	β_{63} = (1 2) (3 4) (5 6)
β_{27}= (1)(5)(3 4)(2 6)	β_{64}= (1 2) (3 5) (4 6)
β_{28}= (1)(5)(2 3)(4 6)	β_{65}= (1 2) (3 6) (4 5)
β_{29}= (1)(5)(2 4)(3 6)	β_{66}= (1 3) (2 4) (5 6)
β_{30}= (1)(6)(2 5)(3 4)	β_{67}= (1 3) (2 5) (4 6)
β_{31}= (1)(6)(2 3)(4 5)	β_{68}= (1 3) (2 6) (4 5)
β_{32}= (1)(6)(2 4)(3 5)	β_{69}= (1 4) (2 3) (5 6)
β_{33}= (2)(3)(1 4)(5 6)	β_{70}= (1 4) (2 5) (3 6)
β_{34}= (2)(3)(1 5)(4 6)	β_{71}= (1 4) (2 6) (3 5)
β_{35}= (2)(3)(1 6)(4 5)	β_{72}= (1 5) (2 3) (4 6)
β_{36}= (2)(4)(1 3)(5 6)	β_{73}= (1 5) (2 4) (3 6)
β_{37}= (2)(4)(1 5)(3 6)	β_{74}= (1 5) (2 6) (3 4)
β_{38}= (2)(4)(1 6)(3 5)	β_{75}= (1 6) (2 3) (4 5)
β_{39}= (2)(5)(1 3)(4 6)	β_{76}= (1 6) (2 4) (3 5)
β_{40}= (2)(5)(1 4)(3 6)	β_{77}= (1 6) (2 5) (3 4)

Dari deskripsi graf lintasan di atas, maka dapat disimpulkan karena setiap titik (kecuali titik ujung) terhubung langsung hanya pada dua titik sehingga permutasi yang memuat sikel-3, sikel-4 dan seterusnya tidak automorfisme. Jadi, permutasinya tidak automorfisme. Di pihak lain, sikel-3 membentuk siklis sedangkan graf lintasan berbentuk siklis hanya pada sikel-2.

Kesimpulan

Fungsi-fungsi di atas merupakan fungsi yang bukan automorfisme, dapat dijelaskan sebagai berikut:

Andaikan $\alpha(v_k) = v_t$

$\alpha(v_{k+1}) = v_m$ dengan $t \neq m$

Sehingga, $\alpha\big((v_k), (v_{k+1})\big) = \big(\alpha(v_k), \alpha(v_{k+1})\big)$

$$= (v_t, v_m) \notin E(P_n)$$

Misalkan, $\alpha(v_1) = v_k$

$\alpha(v_2) = v_t$ dengan $k \neq t$

Maka, $\big((v_1), (v_2)\big) \in E\ (P_n)$

Sehingga, $\alpha\big((v_1), (v_2)\big) = \big(\alpha(v_1), \alpha(v_2)\big)$

$$= (v_k, v_t) \notin E(P_n)$$

3.3 Himpunan Automorfisme Membentuk Grup

Selanjutnya pada bagian terakhir ini akan ditunjukkan bahwa himpunan automorfisme akan membentuk grup. Himpunan automorfisme pada graf bintang-2 ($K_{1,2}$), graf bintang-3 ($K_{1,3}$), graf bintang-4 ($K_{1,4}$), dan graf bintang-5 ($K_{1,5}$), banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme (subgrup) membagi banyaknya semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto (grup). Dapat dikatakan bahwa anggota (order) dari subgrup (automorfisme) membagi grup, maka jelas ini membentuk grup.

Himpunan automorfisme pada graf bintang-2 ($K_{1,2}$), graf bintang-3 ($K_{1,3}$) dan graf bintang-4 ($K_{1,4}$), yang dinyatakan dalam bentuk permutasi, dikenai operasi komposisi maka membentuk grup. Hal ini akan dinyatakan dalam bentuk tabel di bawah ini:

Tabel 3.1 Tabel Cayley dari Graf Bintang-2 ($K_{1,2}$) dengan Komposisi Fungsi

o \ $K_{1,2}$	(1)(2 3)	(1)(2)(3)
(1)(2 3)	(1)(2)(3)	(1)(2 3)
(1)(2)(3)	(1)(2 3)	(1)(2)(3)

Tabel 3.2 Tabel Cayley dari Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dengan Komposisi Fungsi

o \ $K_{1,3}$	(1)(2 3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3)(4)
(1)(2 3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3)(4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(2 3 4)
(1)(2 4 3)	(1)(2)(3)(4)	(1)(2 3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(2 4 3)
(1)(2)(3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3)(4)	(1)(2 3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3 4)
(1)(3)(2 4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3)(4)	(1)(2 3 4)	(1)(3)(2 4)
(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(2 3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3)(4)	(1)(4)(2 3)
(1)(2)(3)(4)	(1)(2 3 4)	(1)(2 4 3)	(1)(2)(3 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(4)(2 3)	(1)(2)(3)(4)

Tabel 3.3 Tabel Cayley dari Graf Bintang-4 ($K_{1,4}$) dengan Komposisi

o \ $K_{1,4}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
a	v	n	l	j	h	x	b	t	e	q	d	o	c	r	m	u	k	g	w	i	s	f	p	a
b	l	w	g	v	n	i	t	a	p	c	e	s	s	o	k	m	u	v	h	j	r	q	d	b
c	j	l	u	m	x	g	s	d	b	p	f	q	r	a	v	n	i	h	k	w	e	t	o	c
d	h	x	j	w	k	m	c	s	f	t	o	a	p	e	n	i	v	u	l	g	q	r	b	d
e	n	i	x	h	u	k	f	r	q	a	s	b	d	p	w	j	l	m	g	v	c	o	t	e
f	x	g	m	k	i	v	r	e	t	d	q	c	o	b	l	w	j	n	u	h	p	a	s	f
g	c	s	r	f	b	t	h	x	w	m	i	u	v	l	q	o	p	a	e	d	n	j	k	g
h	r	e	a	t	s	d	x	g	k	v	w	n	j	y	p	q	h	o	b	f	l	m	i	h
i	b	t	f	e	p	q	v	n	j	x	u	g	k	w	s	d	c	o	r	a	m	l	h	i
j	t	a	q	p	d	c	l	w	x	i	m	v	u	h	r	e	f	s	o	b	k	g	n	j
k	e	f	d	s	q	o	m	u	v	h	l	x	w	i	b	t	a	p	c	r	j	n	g	k
l	q	o	s	c	a	b	w	j	n	u	x	k	g	v	f	r	e	t	d	p	h	i	m	l
m	d	c	p	o	f	r	y	k	g	w	v	j	n	x	a	b	t	e	q	s	i	h	l	m
n	o	p	b	a	r	e	i	v	u	l	h	w	x	m	d	c	s	f	t	q	g	k	w	n
o	k	m	w	l	v	n	p	q	r	s	a	d	b	f	x	g	h	i	j	u	t	e	c	o
p	w	j	i	n	m	u	q	o	c	b	r	t	e	d	h	x	g	k	v	l	f	s	a	p
q	i	v	k	u	j	l	o	p	a	e	c	f	s	t	g	h	x	w	m	n	d	b	r	q
r	m	u	n	v	g	h	e	f	s	o	t	p	a	c	j	l	w	x	i	k	b	d	q	r
s	u	k	h	g	l	w	d	c	o	r	b	e	t	q	i	v	n	j	x	m	a	p	f	s
t	g	h	v	i	w	j	a	b	d	f	p	r	q	s	u	k	m	l	n	x	o	c	e	t
u	p	q	e	r	c	s	k	m	l	n	g	i	h	j	t	a	b	d	f	o	x	w	v	u
v	f	r	o	q	t	a	n	i	h	k	j	m	l	g	c	s	d	b	p	e	w	x	u	v
w	s	d	t	b	o	p	j	l	m	g	n	h	i	k	e	f	r	q	a	c	v	u	x	w
x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x

Keterangan:

a = (1)(2 3 4 5)

b = (1)(2 3 5 4)

c = (1)(2 4 3 5)

d = (1)(2 4 5 3)

e = (1)(2 5 3 4)

f = (1)(2 5 4 3)

g = (1)(2)(3 4 5)

h = (1)(2)(3 5 4)

i = (1)(3)(2 4 5)

j = (1)(3)(2 5 4)

k = (1)(4)(2 3 5)

l = (1)(4)(2 5 3)

m = (1)(5)(2 3 4)

n = (1)(5)(2 4 3)

o = (1)(2)(3)(4 5)

p = (1)(2)(4)(3 5)

q = (1)(2)(5)(3 4)

r = (1)(3)(4)(2 5)

s = (1)(3)(5)(2 4)

t = (1)(4)(5)(2 3)

u = (1)(2 3)(4 5)

v = (1)(2 4)(3 5)

w = (1)(2 5)(3 4)

x = (1)(2)(3)(4)(5)

Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa himpunan automorfisme pada graf bintang-2 ($K_{1,2}$), graf bintang-3 ($K_{1,3}$) dan graf bintang-4 ($K_{1,4}$) membentuk grup. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa himpunan automorfisme membentuk grup.

Fungsi φ: $G \to G$ adalah automorfisme ke dirinya sendiri jika $\forall\ (u, v) \in G$ maka $\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) \in G$, $\varphi_{1\text{-}1}$ dan onto.

Bukti bahwa himpunan automorfisme dari G ke G dengan komposisi fungsi adalah grup, yaitu:

a. Tertutup

Diketahui:

φ adalah automorfisme

π adalah automorfisme

Akan ditunjukkan:

$\varphi \circ \pi$ adalah automorfisme jika $\varphi \circ \pi$ 1-1, onto, dan isomorfisme.

(i) $\varphi \circ \pi$ adalah fungsi 1-1

$\forall\ u, v \in G$ dengan $(\varphi \circ \pi)(u) = (\varphi \circ \pi)(v)$

Maka $(\varphi \circ \pi)(u) = (\varphi \circ \pi)(v)$

$\varphi\big(\pi(u)\big) = \varphi(\pi(v))$

Karena φ satu-satu maka $\pi(u) = \pi(v)$

Karena π satu-satu maka $u = v$.

$\ni\ \forall u, v\ (G)$ dengan $(\varphi \circ \pi)(u) = (\varphi \circ \pi)(v)$ maka $u = v$.

Jadi, $\varphi \circ \pi$ adalah fungsi 1-1.

(ii) $\varphi \circ \pi$ adalah onto

π onto : $\forall u' \in G\ \exists u \in G \ni \pi(u) = u'$

φ onto : $\forall u'' \in G\ \exists u' \in G \ni \varphi(u) = u''$

$\ni (u') = u'$

$\varphi(\pi(u)) = u' \to (\varphi \circ \pi)(u) = u''$

Karena $\forall u'' \in G\ \exists u \in G \ni (\varphi \circ \pi')(u) = u''$ untuk $\varphi \circ \pi$ adalah onto.

(iii) $\varphi \circ \pi$ adalah isomorfisme.

π isomorfisme maka $\forall (u, v) \in G$ maka $(\pi(u), \pi(v)) \in G$

Misal: $\pi(u) = u'$

$\pi(v) = v'$

φ isomorfisme maka $\forall (u', v') \in G$ maka $(\varphi(u'), \varphi(v')) \in G$

sehingga, $(\varphi(u'), \varphi(v')) \in G$

$(\varphi(\pi(u)), \varphi(\pi(v))) \in G$

$(\varphi \circ \pi\ (u), \varphi \circ \pi\ (v)) \in G$

Karena $\forall (u, v) \in G$ berlaku $(\varphi \circ \pi\ (u), \varphi \circ \pi\ (v)) \in G$ maka $\varphi \circ \pi$ adalah isomorfisme.

b. Assosiatif

$((\varphi \circ \pi) \circ \tau)(u) = (\varphi \circ \pi)(\tau(u))$

$((\varphi \circ \pi) \circ \tau)(u) = \varphi(\pi(\tau(u)))$

$\big((\varphi \circ \pi)\circ\tau\big)(u) = \varphi\big((\pi\circ\tau)(u)\big)$

$\big((\varphi \circ \pi)\circ\tau\big)(u) = \big(\varphi\circ(\pi\circ\tau)\big)(u)$

sehingga, $(\varphi \circ \pi)\circ\tau = \varphi\circ(\pi\circ\tau)$

Jadi, operasi ^{o} assosiatif.

c. Ada unsur identitas

Misal I adalah identitas

$$(I \circ \pi)(u) = \pi(u)$$

$$I\big(\pi(u)\big) = \pi(u)$$

$$I(u') = u'$$

$$(\pi\circ I)(u) = \pi(u)$$

$$\pi\big(I(u)\big) = \pi(u)$$

Karena $\pi_{1\text{-}1}$ maka $I(u) = u$.

d. Ada Invers

Menurut Raisinghania (1980:17) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa misalkan $U, V,$ dan W adalah sebarang tiga himpunan tak-kosong dan misalkan φ dan π adalah fungsi satu-satu U pada V dan V pada W berturut-turut sehingga φ dan π merupakan dua fungsi yang *inversible* maka $(\varphi\ o\ \pi)$ juga *inversible* dan

$$(\varphi\ o\ \pi)^{-1} = \varphi^{-1}\ o\ \pi^{-1}$$

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(\varphi \, o \, \pi)$ *inversible*, maka harus ditunjukkan bahwa $(\varphi \, o \, \pi)$ adalah fungsi satu-satu dan onto. Misalkan u dan v adalah dua elemen sebarang dari U, maka

$(\varphi \, o \, \pi)(u) = (\varphi \, o \, \pi)(v)$

$\varphi(\pi(u)) = \varphi(\pi(v))$

$\pi(u) = \pi(v)$ [φ adalah fungsi satu-satu]

$u = v$ [π adalah fungsi satu-satu]

Jadi, $(\varphi \, o \, \pi)$ adalah fungsi satu-satu.

Untuk menunjukkan bahwa $(\varphi \, o \, \pi)$ adalah fungsi onto, misalkan w adalah sebarang elemen dari W, maka φ fungsi onto jika terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga $\varphi(v) = w$. Begitu juga π adalah onto jika terdapat $u \in U$ sedemikian sehingga $\varphi(u) = v$. Akibatnya,

$(\varphi \, o \, \pi)(u) = \varphi(\pi(u))$

$= \varphi(v)$ $[\pi(u) = v]$

$= w$ $[\varphi(v) = w]$

Sehingga untuk sebarang $w \in W$, terdapat $u \in U$ sedemikian sehingga

Selanjutnya, akan ditunjukkan pembangkit pada graf lintasan (P_n) sebagai berikut:

1. Untuk n genap, pembangkitnya adalah:

$$\alpha_1 = (v_1 \;\; v_n)(v_2 \;\; v_{n-1}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}} \;\; v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

Hal ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\alpha_1\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$= (v_1)(v_2) \dots (v_n)$$

2. Untuk *n* ganjil, pembangkitnya adalah:

$$\alpha_2 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Hal ini dapat ditunjukkan bahwa

$\alpha_2\alpha_2 =$

$$(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$= (v_1)(v_2) \dots (v_n)$$

Dari kedua bentuk permutasi di atas maka jelas bahwa graf lintasan (P_n) yang himpunan automorfismenya dinyatakan dalam bentuk permutasi, dikenai operasi komposisi maka membentuk grup.

3.4 Pola Titik Automorfisme pada Graf

Selanjutnya akan ditentukan banyaknya automorfisme dari masing-masing graf ke dirinya sendiri berdasarkan bentuk-bentuk permutasi yang mengacu pada pemetaan titiknya yang memenuhi fungsi tersebut, dengan pola sebagai berikut:

3.4.1 Graf Bintang

Pada graf bintang banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titiknya sebagai berikut:

Tabel 3.4 Banyaknya Automorfisme dari $G(K_{1,n}) \rightarrow G(K_{1,n})$

Graf Bintang	Automorfisme	Banyaknya Automorfisme	
$K_{1,2}$	α = (1)(2)(3)	1	2
	α = (1)(. .)	1	
$K_{1,3}$	α = (1)(2)(3)(4)	1	6
	α = (1)(. . .)	2	
	α = (1)(.)(. .)	3	
$K_{1,4}$	α = (1)(2)(3)(4)(5)	1	24
	α = (1)(. . . .)	6	
	α = (1) (.) (. . .)	8	
	α = (1)(.)(.)(. .)	6	
	α = (1)(. .)(. .)	3	
$K_{1,5}$	α = (1)(2)(3)(4)(5)(6)	1	120
	α = (1)(. . . . .)	24	
	α = (1)(.)(. . . .)	30	
	α = (1)(.)(.)(. . .)	20	
	α = (1)(.)(.)(.)(. .)	10	
	α = (1)(.)(. .)(. .)	15	
	α = (1)(. .)(. . .)	20	
$K_{1,6}$	α = (1)(. . . . . .)	120	120

Pada graf bintang-2 ($K_{1,2}$), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Pada graf bintang-3 ($K_{1,3}$), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 6 fungsi.

Pada graf bintang-4 ($K_{1,4}$), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 24 fungsi.

Pada graf bintang-5 ($K_{1,5}$), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 120 fungsi.

Pada graf bintang-6 ($K_{1,6}$), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri sebanyak 720 fungsi.

Dari penjelasan tentang automorfisme pada graf bintang berdasarkan bentuk-bentuk permutasi yang mengacu pada pemetaan titiknya yang memenuhi fungsi tersebut, maka dapat dibuat tabel banyaknya automorfisme dari kemungkinan banyak fungsi tersebut melalui tempat kedudukan titik-titiknya dengan bentuk fungsi $(1)\ (\underbrace{\ldots\ldots}_{n})$:

Tabel 3.5 Banyaknya Automorfisme Melalui Bentuk Permutasi Titiknya dari $K_{1,n}$

Graf Bintang ($K_{1,n}$)	Σ fungsi berbentuk $(1)\ (\underbrace{\ldots\ldots}_{n})$	
$K_{1,2}$	1	$1 = 1!$
$K_{1,3}$	2	$2 \cdot 1 = 2!$
$K_{1,4}$	6	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$
$K_{1,5}$	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
$K_{1,6}$	120	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
…	…	…

$K_{1,n}$		$n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1=n!$

Dari uraian automorfisme graf bintang di atas maka berdasarkan banyak titik dapat dibuat teorema tentang banyak automorfisme dari graf $K_{1,n}$ untuk n bilangan asli yang fungsinya berbentuk (1) $(\underbrace{\ldots\ldots}_{n})$, yaitu sebagai berikut:

Teorema 2

Graf bintang-n ($K_{1,n}$) memiliki n+1 titik. Banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$.

Diketahui: misalkan α adalah automorfisme dari $K_{1,n}$ ke dirinya sendiri.

Akan dibuktikan: $\alpha(v_1)=v_1$ dan $\alpha(v_k)=v_t$ dengan $k\neq 1$ dan $t\neq 1$.

Bukti

Graf $K_{1,n}$ memiliki $n+1$ titik.

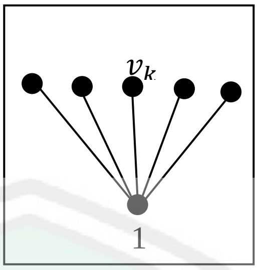
Misalkan titik-titiknya adalah $V(K_{1,n})=(v_1,v_2,v_3,\dots,v_{n+1})$.

Misalkan α adalah automorfisme dari $K_{1,n}$ ke dirinya sendiri.

Karena $\alpha(v_1)=v_1$, yang berarti mengawetkan derajat v_1 itu sendiri, sehingga banyaknya titik yang dapat dipermutasikan adalah sebanyak n titik, maka permutasinya dapat dirumuskan sebanyak $n!$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\alpha(v_1)=v_1$ dan $\alpha(v_k)=v_t$. Karena derajat titik $v_k=1$ sehingga $\alpha(v_k)=v_t$ juga mengawetkan derajat titiknya.

Andaikan $\alpha(v_1)=v_k$ dengan $k\neq 1$ dan $v_t=v_m$ $(k\neq t\neq m)$.



$$(v_1, v_t) \in E(K_{1,n})$$

$$\alpha((v_1, v_t)) = (\alpha(v_1), \alpha(v_t))$$

$$= (v_k, v_m) \notin E(K_{1,n})$$

Jadi, $\alpha(v_1) = v_k$ maka α bukan automorfisme. Sehingga, pengandaian $k \neq 1$ salah.

Jadi, seharusnya pengandaian menjadi $k = 1$ atau $\alpha(v_1) = v_1$.

Dari teorema 2 di atas, maka dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

Teorema 3

Grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n atau $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$.

Bukti

Akan ditunjukkan ada korespondensi satu-satu dari anggota (S_n, o) pada $(\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$.

Buat pemetaan f dari S_n ke $\mathcal{A}(K_{1,n})$ dengan aturan sebagai berikut (contoh dapat dilihat pada lampiran):

$$\begin{array}{llllll} \text{Jika } \alpha \in S_n \text{ dengan } \alpha = & (\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_r), & 1 \leq r \leq n \\ \text{Maka} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ f(\alpha) = & (v_{\alpha_1+1} & v_{\alpha_2+1} & v_{\alpha_3+1} \dots & v_{\alpha_r+1}) & \end{array}$$

Karena α dan $f(\alpha)$ korespondensinya sama, maka bentuk permutasinya sama.

Dapat ditunjukkan bahwa f bersifat bijektif dan homomorfisme.

Jika $x, y \in S_n$ dan $f(x), f(y) \in \mathcal{A}(K_{1,n})$

Maka $x \to f(x)$

$y \to f(y)$

Jadi, $f(xy) = f(x)f(y)$

Dengan demikian f adalah isomorfisme.

Jadi, $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$ terbukti.

3.4.2 Graf Lintasan

Pada graf lintasan banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titiknya sebagai berikut:

Tabel 3.6 Banyaknya Automorfisme dari $G(P_n) \to G(P_n)$

Graf Lintasan	Automorfisme	Banyaknya Automorfisme	
P_2	β = (1)(2)	1	2
	β = (1 2)	1	
P_3	β = (1)(2)(3)	1	2
	β = (1 3)(2)	1	
P_4	β = (1)(2)(3)(4)	1	2
	β = (1 4)(2 3)	1	
P_5	β = (1)(2)(3)(4)(5)	1	2
	β = (1 5)(2 4)(3)	1	
P_6	β = (1)(2)(3)(4)(5)(6)	1	2
	β = (1 6)(2 5)(34)	1	

Dari tabel 3.3 di atas, maka dapat dibuat bentuk umum dari banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme sebagai berikut:

Tabel 3.7 Bentuk Umum Automorfisme dari $G(P_n) \rightarrow G(P_n)$ Berdasarkan Banyak Titik Genap dan Ganjil

n Genap	$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3)\dots(v_n)$ sebanyak 1
	$\alpha_2 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})\dots\left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$
n Ganjil	$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3)\dots(v_n)$ sebanyak 1
	$\alpha_2 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})\dots\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$

Pada graf lintasan-2 (P_2), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Pada graf lintasan-3 (P_3), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Pada graf lintasan-4 (P_4), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Pada graf lintasan-5 (P_5), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Pada graf lintasan-6 (P_6), banyak automorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi.

Dari uraian automorfisme graf lintasan di atas maka berdasarkan banyak titik dapat dibuat teorema tentang banyak automorfisme dari graf P_n, yaitu sebagai berikut:

Teorema 4

Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi yang berbentuk:

a. Untuk *n* genap, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 \ \ v_n)(v_2 \ \ v_{n-1})(v_3 \ \ v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}} \ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$

b. Untuk *n* ganjil, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 \ \ v_n)(v_2 \ \ v_{n-1})(v_3 \ \ v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} \ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$

Bukti:

a. Untuk *n* genap, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 \ \ v_n)(v_2 \ \ v_{n-1})(v_3 \ \ v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}} \ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

Sehingga,

$\alpha(v_1) = v_n$ → mengawetkan derajat titik 1

$\alpha(v_2) = v_{n-1}$ → mengawetkan derajat titik 2

$\alpha(v_3) = v_{n-2}$ → mengawetkan derajat titik 2

↓ ↓

$\alpha\left(v_{\frac{n}{2}}\right) = \alpha\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right)$ → mengawetkan derajat titik 2

↓ ↓

$\alpha(v_{n-1}) = 2$ → mengawetkan derajat titik 2

$\alpha(v_n) = 1$ → mengawetkan derajat titik 1

Karena graf lintasan (P_n) ini jumlah titiknya genap, maka

$((v_1),(v_2)) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha((v_1),(v_2)) = (\alpha(v_1),\alpha(v_2))$

$= (v_n, v_{n-1}) \in E(P_n)$

$((v_2),(v_3)) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha((v_2),(v_3)) = (\alpha(v_2),\alpha(v_3))$

$= (v_{n-1}, v_{n-2}) \in E(P_n)$

$\left(\left(v_{\frac{n}{2}}\right),\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right)\right) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha\left(\left(v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}\right)\right) = \left(\alpha\left(v_{\frac{n}{2}}\right),\alpha\left(v_{\frac{n}{2}+1}\right)\right)$

$= \left(v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}}\right)$

$= \left(v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}\right) \in E(P_n)$

Begitu pula untuk

$((v_{n-1}),(v_n)) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha((v_{n-1}),(v_n)) = (\alpha(v_{n-1}),\alpha(v_n))$

$= (v_2, v_1) \in E(P_n)$

Jadi,

$\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$ terbukti automorfisme.

Selanjutnya, untuk fungsi identitas tidak perlu ditunjukkan karena sudah jelas automorfisme.

b. Untuk n ganjil, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 \ \ v_n)(v_2 \ \ v_{n-1})(v_3 \ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} \ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Sehingga,

$\alpha(v_1) \quad = v_n \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 1

$\alpha(v_2) \quad = v_{n-1} \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 2

$\alpha(v_3) \quad = v_{n-2} \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 2

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\alpha\left(v_{\frac{n+1}{2}-1} \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right) = \alpha\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right) \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 2

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\alpha(v_{n-1}) \quad = 2 \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 2

$\alpha(v_n) \quad = 1 \quad \rightarrow$ mengawetkan derajat titik 1

Maka,

$\big((v_1),(v_2)\big) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha\big((v_1),(v_2)\big) = \big(\alpha(v_1),\alpha(v_2)\big)$

$= \ (v_n, v_{n-1}) \in E(P_n)$

$\big((v_2),(v_3)\big) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha\big((v_2),(v_3)\big) = \big(\alpha(v_2),\alpha(v_3)\big)$

$= \ (v_{n-1}, v_{n-2}) \in E(P_n)$

$$\left(\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\right) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha\left(\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\right) = \left(\alpha\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, \alpha\left(v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\right)\right)$

$$= \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, v_{\frac{n+1}{2}+1}\right) \in E(P_n)$$

Begitu pula untuk

$\left((v_{n-1}), (v_n)\right) \in E(P_n)$

Sehingga, $\alpha\left((v_{n-1}), (v_n)\right) = \left(\alpha(v_{n-1}), \alpha(v_n)\right)$

$$= (v_2, v_1) \in E(P_n)$$

Jadi,

$$\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

adalah automorfisme.

Jadi, berdasarkan pada bagian a dan b maka teorema terbukti benar.

Setelah mengetahui banyaknya automorfisme graf lintasan (P_n) hanya ada 2 fungsi yaitu yang berbentuk:

$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n)$ dan

$\alpha_2 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$ untuk n genap

$= (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$

untuk n ganjil,

Dari teorema 4 di atas, maka dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

Teorema 5

Grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2) atau $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

Bukti

Misalkan $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

Akan ditunjukkan ada korespondensi satu-satu dari anggota (Z_2, o) pada $(\mathcal{A}(P_n), o)$.

Misalkan $Z_2 = \{\tau_1, \tau_2\}$ dan $\mathcal{A}(P_n) = \{a_1, a_2\}$. Selanjutnya, anggota Z_2 dikorespondensikan satu-satu pada titik-titik dari P_n sebagai berikut:

$\tau_1 \sim a_1$

$\tau_2 \sim a_2$ untuk n genap maupun n ganjil

Karena dari teorema 4 grup automorfisme graf lintasan P_n dan grup siklik orde-2 (Z_2) adalah 2, jadi $(P_n, o) \cong (Z_2, o)$.

Selanjutnya, untuk fungsi identitas tidak perlu ditunjukkan karena sudah jelas automorfisme.

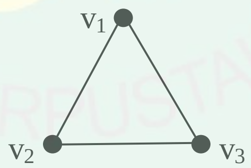
3.5 Kajian Graf dalam Surat *Al-Hujuraat* Ayat 10

Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika menurut definisinya adalah pasangan himpunan (*V*,*E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sebagai sisi. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik dan rukun antar sesama umat. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada Q.S. *Al-Hujuraat* ayat 10:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

"Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat."

Dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Apabila diaplikasikan pada bentuk graf, maka dapat digambarkan seperti berikut ini:



Gambar 3.60 Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara

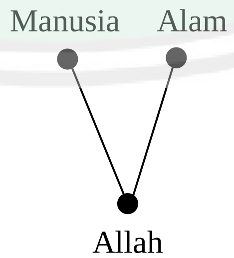
Pada visualisasi gambar diatas merupakan bentuk dari graf sikel dengan jumlah titik adalah 3, dimana antara ketiganya saling berhubungan dan siklis dengan v_1 adalah orang beriman 1, v_2 adalah orang beriman 2, dan v_3 adalah orang beriman 3 yang jika salah satu dari mereka terputus maka kita harus mendamaikannya (memperbaiki hubungan diantara mereka).

Hubungan antara Allah dengan manusia dan alam juga dijelaskan dalam Q.S. *Al-Imran* ayat 112 sebagai berikut:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٖ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٖ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلۡمَسۡكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ كَانُواْ يَكۡفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ
وَيَقۡتُلُونَ ٱلۡأَنۢبِيَآءَ بِغَيۡرِ حَقّٖۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعۡتَدُونَ ١١٢

"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas."

Dalam kehidupan nyata, misalnya hubungan Allah dengan makhluk ciptaan-Nya dimana elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan makhluk-makhluk ciptaan-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan makhluk-makhluk ciptaan-Nya dan juga hubungan yang terjalin, yaitu Hablun min Allah, Hablun min An-Nas wa Hablun min 'Alam.



Gambar 3.61 Hubungan antara Allah dengan Manusia dan Alam Ciptaan-Nya

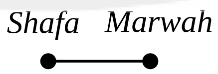
Dari bentuk gambar 2.19 di atas, dapat dikatakan bahwa hubungan Allah dan makhluk ciptaan-Nya merupakan salah satu contoh dari bentuk graf bintang $K_{(1,2)}$ dengan nilai n = 2 dan titik v_1 adalah Allah yang merupakan titik pusat dan titik v_2 dan v_3 berturut-turut adalah manusia dan alam yang merupakan ciptaan Allah.

Suatu graf memiliki titik dan sisi artinya dalam graf tersebut terdapat dua titik yang memiliki satu sisi atau lebih dari satu sisi yang memiliki hubungan dan integritas yang cukup signifikan yang dijelaskan pada Al-Qur'an Q.S. *Al-Baqarah* ayat 158:

إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلْمَرْوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِ ۖ فَمَنْ حَجَّ ٱلْبَيْتَ أَوِ ٱعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ
عَلَيْهِ أَن يَطَّوَّفَ بِهِمَا ۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

"Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber'umrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati, Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui."

Dalam sebuah hadits dijelaskan bahwa Rasulullah SAW bersabda yang artinya, " *Diwajibkan atas kamu melakukan sa'I maka hendaklah kamu lakukan (H.R. Ahmad)* ". Terkait dengan kejadian ini, maka dapat direpresentasikan pada graf dengan mempunyai jumlah 2 titik dan 1 sisi.



Gambar 3.62 Representasi Graf terhadap Ibadah Sa'i

3.6 Kajian Automorfisme Graf dalam Surat *Al-Israa'* Ayat 7

Salah satu kajian yang dapat dibahas dalam teori graf adalah automorfisme graf. Pembahasan automorfisme graf dimulai dengan menggambarkan graf yang akan diteliti, dalam penelitian ini adalah graf bintang dan graf lintasan, kemudian memberi label pada setiap titik pada masing-masing graf. Setelah memberikan label pada setiap titik pada masing-masing graf tersebut, memberi perlakuan berupa permutasi himpunan titik-titiknya yaitu fungsi satu-satu dan onto pada graf tersebut. Unsur pada himpunan *domain* adalah titik-titik yang terdapat pada graf tersebut, begitu pula unsur pada *kodomain*. Jadi, fungsi satu-satu dan onto tersebut memetakan graf awalnya kepada dirinya sendiri. Setelah diberikan perlakuan fungsi satu-satu dan onto ini, maka memilah fungsi yang isomorfisme dan yang bukan isomorfisme. Fungsi yang isomorfisme terhadap dirinya sendiri disebut automorfisme. Dengan kata lain, automorfisme graf ini adalah graf yang diberi perlakuan berupa fungsi yang berbentuk permutasi dan menghasilkan graf yang sama dengan graf awalnya.

Jika ada pemetaan Ω yang satu-satu dan onto dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ yang melestarikan sifat keterhubungan langsung pada dirinya sendiri, yaitu jika u dan v di G_1 dihubungkan oleh k sisi jika dan hanya jika $\Omega(u)$ dan $\Omega(v)$ di G_2 juga dihubungkan oleh k sisi. Jika digambarkan dengan kehidupan sehari-hari, automorfisme sama halnya dengan perilaku manusia sehari-hari. Misalnya, jika manusia berbuat baik kepada Allah SWT dengan cara menaati-Nya, dan kepada sesama manusia dengan berinteraksi sebaik-baiknya, serta bertakwa kepada Allah dalam ucapan dan perbuatan maka pahala semua itu akan diterima dan kebaikannya akan kembali kepada manusia itu sendiri. Sebab, Allah tidak membutuhkan manusia dan harta-hartanya. Jika manusia berbuat buruk dengan kemaksiatan dan dosa maka siksaan akan menimpa manusia dan bencana akan turun kepada manusia itu sendiri (Al-Qarni, 2007: 758). Apabila digambarkan dalam kaitannya dengan fungsi automorfisme sebagai berikut:

Gambar 3.63 Representasi Automorfisme dalam Kehidupan

Perlakuan yang dilakukan oleh manusia (bersifat tunggal) dan balasan yang didapatkan oleh manusia tersebut adalah jika ada pemetaan Ω yang satu-satu dan onto pada dirinya sendiri maka hasil bayangannya adalah dirinya sendiri. Hal tersebut sesuai dengan firman Allah SWT QS. *Al-Israa': 7* yang berbunyi:

إِنْ أَحْسَنتُمْ أَحْسَنتُمْ لِأَنفُسِكُمْ ۖ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا ۚ فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ الْآخِرَةِ لِيَسُوءُوا وُجُوهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبِّرُوا مَا عَلَوْا تَتْبِيرًا ﴿٧﴾

"Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai."

Ayat di atas menjelaskan bahwa setiap perbuatan yang dilakukan oleh seorang manusia pasti akan kembali pada dirinya sendiri, walaupun hasil dari perbuatannya tidak langsung diterima oleh manusia tersebut.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan:

1. Graf bintang-n ($K_{1,n}$) memiliki n+1 titik. Banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$.

   Permutasinya α adalah automorfisme yang harus mengawetkan derajat titik-titiknya, oleh karena itu permutasinya harus berbentuk $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$.
2. Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi yang berbentuk:
   a. Untuk *n* genap, permutasinya berbentuk:

      $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1}) \ldots \left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$

      dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n)$
   b. Untuk *n* ganjil, permutasinya berbentuk:

      $\alpha_1 = (v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2}) \ldots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$

      dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \ldots (v_n)$
3. Grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n atau $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$.

4. Grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2) atau $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis hanya meneliti dan membangun teorema dari automorfisme graf bintang dan graf lintasan yang diaplikasikan untuk mencari banyaknya fungsi yang automorfisme berdasarkan bentuk fungsi permutasinya yang automorfisme yaitu titik $v_1 \in V(K_{1,n})$ yang selalu dipetakan ke dirinya sendiri pada graf $K_{1,n}$ dan berdasarkan jumlah titik genap dan ganjil pada graf P_n. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkannya dengan meneliti dan membangun teorema dari automorfisme pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori graf.* Malang: UIN Malang Perss.

Al-Qarni, ‘Aidh. 2007a. *Tafsir Muyassar (Jilid 1)*. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qarni, ‘Aidh. 2007b. *Tafsir Muyassar (Jilid 2)*. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qarni, ‘Aidh. 2007c. *Tafsir Muyassar (Jilid 4)*. Jakarta: Qisthi Press.

Ash-Shiddieqy, Tengku Muhammad Hasby. 2000. *Tafsir Al-Qur’anul Majid An-Nuur*. Semarang: Pustaka Rizky Putra.

Balakrishnan, V. K. 1991. *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. dan Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis (third edition)*. USA: John Wiley and Sons.

Beachy, John A. dan Blair, William D. 1990. *Abstract Algebra with a Concrete Introduction*. New Jersey: Prentice-Hall. Inc.

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: A Division of Wadsworth.Inc.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall International.

Fitriyah, Any Tsalasatul. 2011. *Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Grimaldi, Ralph. 1985. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. RHI.

Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.

Purwanto. 1998. *Teori Graf*. Malang: IKIP MALANG.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur’an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M.D., dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Rosyidah, Himmah. 2010. *Grup Automorfisme Graf Komplit dan Graf Sikel*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Turmudi, dkk. 2006. *Islam, Sains, dan Teknologi*. Malang: UIN Press.

Wilson, R.J. dan Watkins, J. J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Yusuf, Ali Anwar. 2005. *Islam dan Sains Modern*. Bandung: CV Pustaka Setia.

LAMPIRAN

Deskripsi contoh isomorfisme dari grup simetri S_n ke automorfisme graf $(K_{1,n})$

$S_2 = 2! = 2$ elemen dengan $\Omega = \{1, 2\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(K_{1,2}) = 2! = 2$ elemen

$\sigma_1 = (1)(2)$	isomorfik	$\alpha_1 = (1)(2)(3)$
$\sigma_2 = (1\ \ 2)$		$\alpha_2 = (1\ \ 2\ \ 3)$

$S_3 = 3! = 6$ elemen dengan $\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(K_{1,3}) = 3! = 6$ elemen

$\sigma_1 = (1)(2)(3)$	isomorfik	$\alpha_1 = (1)(2)(3)(4)$
$\sigma_2 = (1)(2\ \ 3)$		$\alpha_2 = (1)(2)(3\ \ 4)$
$\sigma_3 = (1\ \ 2)(3)$		$\alpha_3 = (1)(4)(2\ \ 3)$
$\sigma_4 = (1\ \ 3)(2)$		$\alpha_4 = (1)(3)(2\ \ 4)$
$\sigma_5 = (1\ \ 2\ \ 3)$		$\alpha_5 = (1)(2\ \ 3\ \ 4)$
$\sigma_6 = (1\ \ 3\ \ 2)$		$\alpha_6 = (1)(2\ \ 4\ \ 3)$

$S_4 = 4! = 24$ elemen dengan $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\qquad$ $\mathcal{A}(K_{1,3}) = 3! = 6$ elemen

$\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)$	isomorfik	$\alpha_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$
$\sigma_2 = (1)(2\ \ 3\ \ 4)$		$\alpha_2 = (1)(2)(3\ \ 4\ \ 5)$
$\sigma_3 = (1)(2\ \ 4\ \ 3)$		$\alpha_3 = (1)(2)(3\ \ 5\ \ 4)$
$\sigma_4 = (2)(1\ \ 3\ \ 4)$		$\alpha_4 = (1)(3)(2\ \ 4\ \ 5)$
$\sigma_5 = (2)(1\ \ 4\ \ 3)$		$\alpha_5 = (1)(3)(2\ \ 5\ \ 4)$
$\sigma_6 = (3)(1\ \ 2\ \ 4)$		$\alpha_6 = (1)(4)(2\ \ 3\ \ 5)$
$\sigma_7 = (3)(1\ \ 4\ \ 2)$		$\alpha_7 = (1)(4)(2\ \ 5\ \ 3)$
$\sigma_8 = (4)(1\ \ 2\ \ 3)$		$\alpha_8 = (1)(5)(2\ \ 3\ \ 4)$
$\sigma_9 = (4)(1\ \ 3\ \ 2)$		$\alpha_9 = (1)(5)(2\ \ 4\ \ 3)$
$\sigma_{10} = (1)(2)(3\ \ 4)$		$\alpha_{10} = (1)(2)(3)(4\ \ 5)$
$\sigma_{11} = (1)(3)(2\ \ 4)$		$\alpha_{11} = (1)(2)(4)(3\ \ 5)$

$\sigma_{12} = (1)(4)(2\ \ 3)$	$\alpha_{12} = (1)(2)(5)(3\ \ 4)$
$\sigma_{13} = (2)(3)(1\ \ 4)$	$\alpha_{13} = (1)(3)(4)(2\ \ 5)$
$\sigma_{14} = (2)(4)(1\ \ 3)$	$\alpha_{14} = (1)(3)(5)(2\ \ 4)$
$\sigma_{15} = (3)(4)(1\ \ 2)$	$\alpha_{15} = (1)(4)(5)(2\ \ 3)$
$\sigma_{16} = (1\ \ 2)(3\ \ 4)$	$\alpha_{16} = (1)(2\ \ 3)(4\ \ 5)$
$\sigma_{17} = (1\ \ 3)(2\ \ 4)$	$\alpha_{17} = (1)(2\ \ 4)(3\ \ 5)$
$\sigma_{18} = (1\ \ 4)(2\ \ 3)$	$\alpha_{18} = (1)(2\ \ 5)(3\ \ 4)$
$\sigma_{19} = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$	$\alpha_{19} = (1)(2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$
$\sigma_{20} = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$	$\alpha_{20} = (1)(2\ \ 3\ \ 5\ \ 4)$
$\sigma_{21} = (1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$	$\alpha_{21} = (1)(2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$
$\sigma_{22} = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$	$\alpha_{22} = (1)(2\ \ 4\ \ 5\ \ 3)$
$\sigma_{23} = (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$	$\alpha_{23} = (1)(2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$
$\sigma_{24} = (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$	$\alpha_{24} = (1)(2\ \ 5\ \ 4\ \ 3)$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Reni Tri Damayanti
NIM : 07610029
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Hal	TandaTangan	
1	20 Agustus 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	03 September 2010	Konsultasi BAB I		2.
3	17 September 2010	Revisi BAB I	3.	
4	24 September 2010	ACC BAB I dan Konsultasi BAB II		4.
5	01 Oktober 2010	Revisi Pertama BAB II	5.	
6	08 Oktober 2010	Revisi Kedua BAB II		6.
7	15 Oktober 2010	ACC BAB II dan Konsultasi BAB III	7.	
8	22 Oktober 2010	Revisi Pertama BAB III		8.
9	29 Oktober 2010	Revisi Kedua BAB III	9.	
10	05 November 2010	Revisi Ketiga BAB III		10.
11	12 Desember 2010	ACC BAB III dan Konsultasi BAB IV	11.	
12	21 Desember 2010	Revisi Pertama BAB IV		12.
13	26 Desember 2010	Revisi Kedua BAB IV	13.	
14	14 Januari 2010	ACC BAB IV dan ACC Keseluruhan		14.
15	10 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan	15	
16	11 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan		16.
17	14 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan dan ACC	17.	

Malang, 15 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006200312 1 001