AUTOMORFISME GRAF RODA DAN GRAF TANGGA

SKRIPSI

oleh:
ANY TSALASATUL FITRIYAH
NIM. 07610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

AUTOMORFISME GRAF RODA DAN TANGGA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
ANY TSALASATUL FITRIYAH
NIM. 07610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

AUTOMORFISME GRAF RODA DAN GRAF TANGGA

SKRIPSI

oleh:

ANY TSALASATUL FITRIYAH
NIM. 07610031

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji :

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 19700420 200003 1 001	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Tanggal, 15 Januari 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

AUTOMORFISME GRAF RODA DAN GRAF TANGGA

SKRIPSI

oleh:

ANY TSALASATUL FITRIYAH
NIM. 07610031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 21 Januari 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
2.	Ketua	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
3.	Sekretaris	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19700420 200003 1 001	( )
4.	Anggota	: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Any Tsalasatul Fitriyah
NIM	:	07610031
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul	:	Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Januari 2011
Yang membuat pernyataan,

Any Tsalasatul Fitriyah
NIM. 07610031

MOTTO:

Berusahalah untuk tidak menjadi manusia yang berhasil tapi berusahalah untuk menjadi manusia yang berguna

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Karya sederhana ini teruntuk :

Orang-orang yang telah memberikan semangat bagi hidup penulis
Dengan pengorbanan, kasih sayang, dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tua penulis yang paling berjasa dan selalu menjadi motivator dan penyemangat dalam penyeleseaian penulisan skripsi ini Ibu Siti Chotidjah dan Bapak Mahmudi serta saudara-saudara penulis Taufik Sholeh Hasan dan Arief Sulaiman Fathoni yang tak pernah henti memberi semangat pada penulis untuk menyelesaikan penyusunan skripsi ini...

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji dan syukur hanya ditujukan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat terbaik berupa iman dan Islam, juga yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga" sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si).

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada kekasih hati baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menunjukkan jalan kebenaran dan keselamatan, yakni ajaran Islam yang menjadi rahmat bagi seluruh umat manusia dan sekalian alam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan panghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang .
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd sebagai dosen wali dan dosen pembimbing Matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Kedua orang tua penulis Ayahanda Mahmudi dan Bunda Siti Chotidjah yang dengan restunya, doanya, harapan-harapan serta pengorbanannya menjadikan penulis untuk tidak menyerah pada keadaan dalam keadaan bagaimanapun, termasuk dalam penyelesaian Skripsi ini.
8. Saudara-saudara penulis Taufik Sholeh Hasan dan Arief Sulaiman Fathoni yang dengan doa serta dukungannya menjadikan penulis semakin bersemangat dalam penulisan skripsi ini.
9. Teman terbaik penulis Edwin Pane yang selalu memberi semangat dan memberi bantuan kepada penulis untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman penulis yang telah banyak berjasa Puspita Dyan, Reni Tri Damayanti, Nurjianah, Fitrotin Nisa' yang selalu memberi semangat serta arahan dalam penulisan skripsi ini.
11. Teman-teman jurusan matematika yang telah banyak membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
12. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung pada proses terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya. Amin.

Harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Amin.

Malang,15 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

ABSTRAK

Tsalasatul F, Any. 2011. **Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci : graf roda, graf tangga, isomorfisme graf, automorfisme graf, dan grup simetri.

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik V(G) atau sisi-sisi dari graf G, E(G) yang menghasilkan graf yang isomorfik dengan graf awalnya. Jika φ adalah suatu automorfisme dari G dan v∈V(G) maka $deg_G \varphi(v) = deg_G v$. Untuk mencari automorfisme pada suatu graf, biasanya dilakukan dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu, onto, dan isomorfisme dari himpunan titik pada graf tersebut. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dan menguraikan automorfisme graf roda dan graf tangga serta penjabarannya.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka *(library research)*, dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Merumuskan masalah; (2) Menggambarkan graf roda dan graf tangga sebagai data; (3) Memberi label pada setiap titik pada masing-masing graf; (4) Menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto dari setiap graf pada dirinya sendiri; (5) Memilah fungsi yang isomorfisme dari semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto; (6) Menentukan karakteristik dari fungsi isomorfisme; (7) Membuktikan konjektur benar secara umum.

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh (1) Automorfisme pada graf Roda W_n dimana n bilangan prima maka fungsi automorfismenya sebanyak n-1; (2) Automorfisme pada graf tangga L_n yang berpola (1 . . . .) hanya ada pada graf tangga L_2; (3) Himpunan fungsi yang automorfisme pada graf roda-3 (W_3) membentuk grup bila dikenai oleh fungsi komposisi.

Automorfisme graf roda dan graf tangga diaplikasikan untuk mencari banyaknya fungsi yang automorfisme pada graf roda dengan pola (1)(. . .) dan graf tangga dengan pola (1 . . .). Sehingga, pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian automorfisme pada bentuk pola yang lain atau jenis graf yang lain.

ABSTRACT

Tsalasatul F, Any. 2011. **Automorphism of Wheels Graph and Ladder Graph.** Thesis, Mathematics Department. Faculty Science and Technology, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim of Malang.

Advisor : (1) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords : wheel graph, ladder graph, isomorphism graph, automorfism graphs, and simetri group.

One of interesting topics in graph theory is graph automorphism. Let φ is bijective function from G to itself and φ is isomorphism then φ is automorphism. In other words automorphism graph G is a permutation of the set points V(G) or the sides of graph G, E (G). If φ is a automorphism of G and $v \in V(G)$ then $deg_G\ \varphi(v) = deg_G\ v$. In this research automorphism on a graph usually by probability of bijective function and isomorphism the set point of the graph. The object of study is knowing and describe to automorphism of wheel graph and ladder graph.

The method of study is library research with steps of research are: (1) Formulate the problem, (2) Describe of the wheel graph and ladder graph, (3) Labeling of point to graph, (4) Determine bijective function from graph to itself, (5) Classify graph isomorphism, (6) Determine the characteristics of graph isomorphism; (7) Prove the conjecture.

According to discussion have (1) Wheel graph-n (W_n) automorphism where n is prime number the automorphism function is n-1, (2) Ladder graph-n (L_n) automorphism form (1. . .) just only on ladder graph-2 (L_2) , (3) The set of automorphism function of W_3 with composition function is a group.

Wheel graph and ladder graph automorphism applied to find automorphism function of wheel graph with form (1)(. . .) and ladder graph with form (1 . . .). The researcher suggest to other form and other graph on the next research.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah kitab suci yang diturunkan sebagai petunjuk dan pedoman bagi kehidupan manusia. Al-Quran sebagai sumber hukum yang harus ditaati oleh umat muslim di dunia ini. Semua perkara telah diatur di dalamnya. Perkara yang berhubungan dengan kehidupan di dunia dan di akherat, baik yang tampak maupun yang ghoib.

Di dunia manusia memiliki pemahaman yang berbeda-beda. Perbedaan itu disimbolkan dalam perilaku manusia yang berbeda-beda pula. Ada perilaku manusia yang baik dan ada pula perilaku manusia yang buruk. Dari perilaku-perilaku tersebut akan mengakibatkan berbagai macam persoalan. Di dalam Al-Quran juga telah dijelaskan berbagai macam perilaku manusia di dunia ini. Bahkan Al-Quran telah menjelaskannya sebelum perilaku itu ada. Allah telah merencanakan semua itu yang tertulis dalam Al-Quran.

Dalam kehidupan terdapat kata "sebab-akibat", di dunia ini semua perilaku yang dilakukan akan mendapat balasan. Entah hasil yang baik atau yang buruk. Seperti yang dijelaskan dalam ayat Al-Quran surat Al-Isro ayat 7 yang berbunyi:

إِنْ أَحْسَنتُمْ أَحْسَنتُمْ لِأَنفُسِكُمْ ۖ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا ۚ فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ الْآخِرَةِ لِيَسُوءُوا وُجُوهَكُمْ
وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبِّرُوا مَا عَلَوْا تَتْبِيرًا ﴿٧﴾

7. Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, *sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai* (Q. S. Al-Isro': 7).

Semua perbuatan baik maupun buruk akan ada hasil yang dicapai. Hasil yang dicapai itu juga akan kembali pada diri sendiri. Sama halnya jika seseorang belajar, jika manusia belajar dengan rajin maka akan ada hasil yang maksimal pula. Karena dengan belajar seseorang akan menambah wawasan dan pengetahuan yang lebih luas.

Dengan pengetahuan hidup manusia bisa terarah, Seseorang bisa memilah-milah perbuatan yang baik dan yang buruk. Oleh karena itu, manusia wajib mempelajari berbagai macam pengetahuan.

Di dunia ini banyak sekali macam ilmu pengetahuan. Ilmu-ilmu tersebut berasal dari Allah. Namun, ilmu pengetahuan yang telah banyak dikaji oleh para ilmuwan hanyalah sebagian kecil dari ilmu Allah, masih banyak ilmu pengetahuan yang belum dikaji dan perlu dikaji. Hal itu karena luasnya ilmu Allah sangat tidak terbatas dan meliputi semua perkara (Q.S.Thaha: 98). Dalam Q.S. Al-Kahfi ayat 109 dijelaskan betapa luasnya ilmu Allah.

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

109. Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)" (Q. S. Al-Kahfi: 109).

Sebagai umat muslim diwajibkan untuk mempelajari ilmu pengetahuan, karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan bisa menambah keyakinan terhadap kekuasaan-Nya serta mempertebal keimanan terhadap Allah.

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang. Matematika dapat dikatakan "Queen of Science" karena matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Matematika banyak membantu mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan dalam kajian ilmu-ilmu lain. Oleh sebab itu, matematika menduduki posisi yang cukup penting dalam ilmu pengetahuan.

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf telah dikembangkan sejak tahun 1960, dimulai oleh Euler yang menggambarkan suatu masalah lintasan yang melalui jembatan dan pulau di tengah kota Koninsberg. Masalah tersebut digambarkan melalui titik dan sisi yang menghubungkan antar titik, yang akhirnya berkembang dan dikenal sebagai Graf. Graf didefinisikan dalam himpunan titik (vertek) yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi (edge) yang mungkin kosong. Himpunan titik dari suatu graf G dinyatakan dengan V(G) dan himpunan sisi dinyatakan dengan E(G). Selanjutnya graf ini terus dikembangkan melalui riset-riset yang memberikan solusi termudah bagi masalah manusia khususnya tentang jaringan, lintasan, penjadwalan dan sebagainya.

Sejalan dengan berkembangnya peradaban kehidupan manusia, graf telah marak dikembangkan melalui riset-riset pada tahun 1960-an. Saat ini graf telah masuk dalam bagian kurikulum matematika yang wajib ditempuh khususnya pada jurusan matematika dan informatika. Banyak sekali kegunaan graf dalam aplikasi pada kehidupan manusia. Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang direpresentasikan oleh titik dan garis, agar menjadi lebih mudah dalam menganalisis dan pengambilan kesimpulan dari masalah yang bersangkutan. Misalnya, pada penggambaran jaringan komunikasi, komputer, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, dan lain-lainnya. Bahkan masalah penjadwalan dari mulai yang mudah sampai yang paling rumit seperti penjadwalan pesawat terbang, terminal, stasiun, perjalanan dan sebagainya, juga menggunakan prinsip graf.

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Tidak banyak teori yang mengkaji masalah automorfisme sehingga hal ini membuka peluang bagi matematikawan dan pemerhati matematika untuk melakukan riset-riset dalam membangun teori-teori khususnya tentang automorfisme graf. Pada penelitian ini, penulis akan mengkaji tentang automorfisme graf yang diberi judul “**Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga**”.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai "Bagaimana automorfisme graf roda dan graf tangga?"

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya akan dibahas tentang graf roda dan graf tangga, graf roda dimulai dengan graf roda-3 (W_3) dan graf tangga dimulai dengan graf tangga-2 (L_2). Pada graf roda teorema yang dibangun hanya dari fungsi yang berpola (1)(. . .) sedangkan pada graf tangga hanya pada fungsi yang berpola (1 . . .)

.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

a. Mengetahui dan menjabarkan automorfisme graf roda dan graf tangga serta bagaimana penjabarannya

b. Mengetahui rumusan umum (teorema) dari automorfisme graf roda dan graf tangga sampai banyak *n* (General)

c. Menunjukkan bukti secara umum teorema yang telah dibangun atau ditemukan pada bagian b

d. Menunjukkan bukti secara umum bahwa himpunan fungsi automorfisme graf roda dan graf tangga dengan operasi komposisi adalah membentuk grup.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

a. Bagi Penulis

1. Tambahan pengetahuan tentang graf khususnya automorfisme graf dan sifat-sifatnya dari graf roda dan graf tangga.
2. Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

b. Bagi Lembaga

1. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan bahan perkuliahan khususnya tentang materi automorfisme graf.
2. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi graf

c. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai automorfisme graf.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat pertanyaan.

2. Mengidentifikasi data yang akan digunakan dalam penelitian ini, dalam hal ini data yang digunakan berupa graf roda (W_3 sampai W_{11}) dan graf tangga (L_2 sampai L_3 karakteristik titik, derajat titik, dan sisi.
3. Mengidentifikasi definisi, teorema, lema, dalil, rumus, dan sifat yang terkait langsung maupun yang mendukung pengambilan kesimpulan pada penelitian ini dari berbagai literatur.
4. Menganalisa data yang meliputi langkah-langkah berikut:
   a. Menggambarkan graf roda (W_3 sampai W_{11}) dan graf tangga (L_2 sampai L_3)
   b. Memberikan label pada setiap titik dari masing-masing graf yang telah digambarkan pada bagian a.
   c. Menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto dari setiap graf pada dirinya sendiri dari bagian b.
   d. Memilah fungsi yang isomorfisme dari semua kemungkinan fungsi yang telah dituliskan pada bagian c.
   e. Menentukan karakteristik dari fungsi isomorfisme.
   f. Membuktikan benar secara umum bahwa himpunan fungsi automorfisme dengan operasi komposisi adalah membentuk grup.
5. Membuat kesimpulan dan melaporkan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

2. **BAB II KAJIAN TEORI**

   Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat definisi graf, *adjacent* dan *incident*, derajat titik, lemma jabat tangan, operasi pada graf, graf roda, graf tangga, isomorfisme graf, automorfisme graf, definisi fungsi, grup, dan grup simetri

3. **BAB III PEMBAHASAN**

   Dalam bab ini dipaparkan tentang "bagaimana automorfisme pada graf roda dan graf tangga?"

4. **BAB IV PENUTUP**

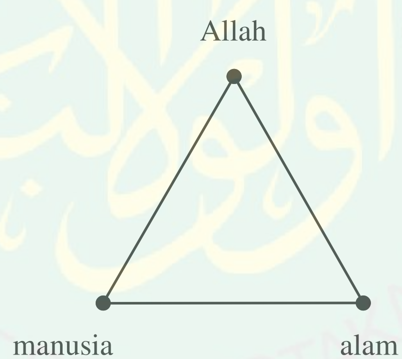
   Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Teori Graf dalam Islam

Sesuai dengan definisi graf yaitu pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi G(V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices atau node*) dan E adalah himpunan sisi *(edges)* yang menghubungkan sepasang simpul. Maka dalam Islam, elemen yang dimaksud adalah Allah dan hamba-hambanya, sedangkan sisi/garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut menujukkan bagaimana hubungan Allah sebagai pencipta dengan manusia dan alam.



Gambar 2.1 Graf hubungan Allah, manusia, dan alam

Dalam hal ini dijelaskan hubungan Allah dengan makhlukNya, Allah sebagai pencipta yang menciptakan manusia dan alam semesta. Tidak ada Tuhan yang patut disembah selain Allah. Maka dari itu, sebagai makhluk Allah wajib menjaga hubungan dengan Allah sang Maha pencipta (Hablun minallah) yaitu dengan taqwa kepada Allah. Seperti yang dijelaskan pada firman Allah:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ
وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ
ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

112. Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas (Q.S. Ali Imron: 112).

Dalam ayat ini dijelaskan bahwa manusia akan mendapatkan malapetaka dan kehinaan dimanapun berada. Tetapi Allah memberi petunjuk agar kita terhindar dari malapetaka yaitu dengan menjalin hubungan baik dengan Allah sebagai sang pencipta (Hablun minallah) dan juga menjaga hubungan baik kepada sesama makhluk Allah.

2.1.1 Graf Roda

Dalam Islam manusia melakukan ibadah dalam hal ini ibadah sholat dan ibadah haji berpusat pada kiblat. Seperti yang dijelaskan dalam firman Allah sebagai berikut:

۞ جَعَلَ ٱللَّهُ ٱلْكَعْبَةَ ٱلْبَيْتَ ٱلْحَرَامَ قِيَٰمًا لِّلنَّاسِ وَٱلشَّهْرَ ٱلْحَرَامَ وَٱلْهَدْىَ وَٱلْقَلَٰٓئِدَ ۚ ذَٰلِكَ
لِتَعْلَمُوٓا۟ أَنَّ ٱللَّهَ يَعْلَمُ مَا فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلْأَرْضِ وَأَنَّ ٱللَّهَ بِكُلِّ شَىْءٍ عَلِيمٌ ﴿٩٧﴾

97. Allah Telah menjadikan Ka'bah, rumah Suci itu sebagai pusat (peribadatan dan urusan dunia) bagi manusia[444], dan (demikian pula) bulan Haram[445], had-ya[446], qalaid[447]. (Allah menjadikan yang) demikian itu agar kamu tahu, bahwa Sesungguhnya Allah mengetahui apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi dan bahwa Sesungguhnya Allah Maha mengetahui segala sesuatu (Q.S. Al- Maidah: 97).

Sholat mempunyai kedudukan yang sangat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah sholat wajib hukumnya menghadap kiblat, hal ini dijelaskan pada firman Allah Q.S. Al-Baqarah ayat 144 yang berbunyi:

قَدۡ نَرَىٰ تَقَلُّبَ وَجۡهِكَ فِي ٱلسَّمَآءِۖ فَلَنُوَلِّيَنَّكَ قِبۡلَةٗ تَرۡضَىٰهَاۚ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ
ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ شَطۡرَهُۥۗ وَإِنَّ ٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡكِتَٰبَ لَيَعۡلَمُونَ أَنَّهُ ٱلۡحَقُّ
مِن رَّبِّهِمۡۗ وَمَا ٱللَّهُ بِغَٰفِلٍ عَمَّا يَعۡمَلُونَ ١٤٤

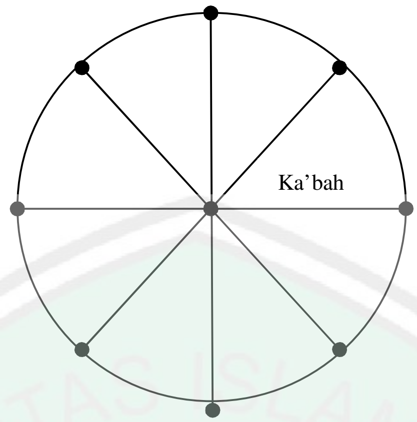
144. Sungguh kami (sering) melihat mukamu menengadah ke langit[96], Maka sungguh kami akan memalingkan kamu ke kiblat yang kamu sukai. palingkanlah mukamu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu berada, palingkanlah mukamu ke arahnya. dan Sesungguhnya orang-orang (Yahudi dan Nasrani) yang diberi Al Kitab (Taurat dan Injil) memang mengetahui, bahwa berpaling ke Masjidil Haram itu adalah benar dari Tuhannya; dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang mereka kerjakan (Q.S. Al-Baqarah: 144).

Q.S. Al-Baqarah ayat 144 ini juga dipertegas dengan ayat sebagai berikut:

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۖ وَإِنَّهُۥ لَلۡحَقُّ مِن رَّبِّكَۗ وَمَا ٱللَّهُ بِغَٰفِلٍ
عَمَّا تَعۡمَلُونَ ١٤٩

149. Dan dari mana saja kamu keluar (datang), Maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram, Sesungguhnya ketentuan itu benar-benar sesuatu yang hak dari Tuhanmu. dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang kamu kerjakan (Q.S. Al-Baqarah: 149).

Ka'bah yang terletak di dalam Masjidil Haram menjadi pusat lingkaran dari manusia yang mengelilinginya, manusia yang sholat dengan menghadap Ka'bah. Jika digambar dalam bentuk graf maka ada satu titik yang menjadi pusat dan ada garis yang mengelilingi titik tersebut (seperti pada Gambar 2.2). Titik pusat ini diibaratkan ka'bah dan lingkaran yang mengitarinya adalah manusia.



Gambar 2.2 Ilustrasi gambar ka'bah dengan Manusia mengelilinginya

Pusat Masjidil Haram, menjadi kiblat atau arah ibadah shalat disebut Ka'bah. Ka'bah adalah sebuah bangunan bebentuk balok, dibangun oleh nabi Ibrahim a.s. dan putranya nabi Isma'il a.s. Di sekitar Ka'bah terdapat maqam nabi Ibrahim, Hijr Ismail, dan Hajar Aswad (Batu Hitam) yang dipasang oleh Nabi Muhammad pada sudut tenggara Ka'bah. Ka'bah mempunyai empat sudut yang salah satu sudutnya terdapat Hajar Aswad. Sudut yang lain mengapit sudut Hajar Aswad adalah sudut Syamsi dan sudut Yamani.

Selain menjadi pusat umat muslim beribadah sholat, Ka'bah juga menjadi pusat ibadah yang disebut Thawaf. Thawaf adalah ibadah yang dilakukan umat muslim ketika haji. Thawaf dilakukan dengan cara mengelilingi Ka'bah sebanyak 7 kali, 3 kali pertama dilakukan dengan berlari-lari kecil (jika mungkin), dan selanjutnya berjalan biasa. Satu putaran Thawaf dimulai dari Hajar Aswad dan diakhiri di Hajar Aswad lagi setelah melewati titik/rukun Yamani dan rukun Syamsi. Thawaf dilakukan dengan memutar berlawanan arah dengan putaran jarum jam (Sudarsono dan Susmayati,1992: 221).

Dalam rangkaian ibadah haji, kedudukan thawaf sangat penting sekali. Selama berhaji sangat dianjurkan untuk memperbanyak thawaf sunnah (tathawu) karena keutamaannya. Dari representasi diatas maka graf roda dapat digambarkan seperti ibadah umat Islam dalam hal ini ialah ibadah sholat dan ibadah thawaf.

2.1.2 Graf Tangga

Tangga dalam bahasa Arab adalah "sullam". Istilah sullam/tangga dalam Al-Quran digunakan dalam beberapa ayat sebagai berikut

أَمْ لَهُمْ سُلَّمٌ يَسْتَمِعُونَ فِيهِ ۖ فَلْيَأْتِ مُسْتَمِعُهُم بِسُلْطَٰنٍ مُّبِينٍ ﴿٣٨﴾

38. Ataukah mereka mempunyai tangga (ke langit) untuk mendengarkan pada tangga itu (hal-hal yang gaib)? Maka hendaklah orang yang mendengarkan di antara mereka mendatangkan suatu keterangan yang nyata (Q.S. Ath Thuur: 38).

Contoh lain kata ini terdapat dalam surat Al-An'am ayat 35

وَإِن كَانَ كَبُرَ عَلَيْكَ إِعْرَاضُهُمْ فَإِنِ ٱسْتَطَعْتَ أَن تَبْتَغِىَ نَفَقًا فِى ٱلْأَرْضِ أَوْ سُلَّمًا فِى ٱلسَّمَآءِ
فَتَأْتِيَهُم بِـَٔايَةٍ ۚ وَلَوْ شَآءَ ٱللَّهُ لَجَمَعَهُمْ عَلَى ٱلْهُدَىٰ ۚ فَلَا تَكُونَنَّ مِنَ ٱلْجَٰهِلِينَ ﴿٣٥﴾

35. Dan jika perpalingan mereka (darimu) terasa amat berat bagimu, Maka jika kamu dapat membuat lobang di bumi atau tangga ke langit lalu kamu dapat mendatangkan mukjizat kepada mereka (maka buatlah)[470]. kalau Allah menghendaki, tentu saja Allah menjadikan mereka semua dalam petunjuk sebab itu janganlah sekali-kali kamu termasuk orang-orang yang jahil (Q.S. Al-An'am: 35).

Istilah "tangga" digunakan dalam Al-Quran dengan sebutan "Sullam". Dari istilah tersebut berarti Islam juga bermakna "Sullam", tangga dengan kata lain berarti bertahap.

Manusia secara fitrah tercipta dalam kebertahapan dan keseimbangan yang nyata. Kebertahapan selalu melekat dalam seluruh kiprah manusia, baik secara individu maupun kolektif. Manusiapun mengenal fase/tahapan kehidupan, mulai dari alam rahim, alam dunia, alam kubur, dan seterusnya. Al Qur'an pun diturunkan secara bertahap ke dunia melalui malaikat Jibril kepada Nabi Muhammad, tidak diturunkan secara langsung keseluruhan. Surat yang pertama kali diturunkan adalah surat Al Alaq ayat 1 sampai 5. Dalam mengenalkan Islam ke seluruh manusia juga ada tahapannya, sebagaimana yang dicontohkan oleh Rasulullah SAW. Dalam proses belajar pun seseorang melakukannya secara bertahap, diawali dengan mempelajari ilmu-ilmu dasar, sampai ke tingkat lanjut. Hidup ini tidak terlepas dari yang namanya kebertahapan. Bertahap juga bisa diartikan: tidak tergesa-gesa.

Kaitannya antara Sullam (bertahap) dengan Islam, misalnya dalam menerapkan Islam ada tahapannya, bersungguh-sungguh mulai dari menguatkan aqidah, ibadah, dan seterusnya hingga menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, untuk mempelajari Islam dimulai dari dasar-dasar Islam, mulai dari aqidah (misalnya tentang syahadat, tentang Allah, Rasul, kiamat, dan seterusnya). Selanjutnya mempelajari tentang ibadah (misalnya tentang shalat, puasa, zakat, dan seterusnya). Setelah itu baru yang lain. Namun ini bukan berarti dapat dijadikan alasan untuk menyimpangkan diri dari Islam, misalnya untuk tidak shalat, dengan alasan masih mempelajari aqidah. Shalat tetaplah wajib hukumnya, tidak berubah dari dulu hingga sekarang. Apalagi shalat merupakan bagian dari rukun Islam. Demikian pula dengan yang lain, misalnya puasa, zakat, dan seterusnya.

Dari penjelasan di atas, jika dikaitkan dengan graf maka dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 2.3 Graf tangga yang diibaratkan tahapan manusia

Semakin ke atas tingkatan manusia, semakin dekat dengan tujuannya, yaitu menuju derajat kesempurnaan dari ketaqwaan seseorang.

2.1.3 Automorfisme Graf

Salah satu kajian yang dapat dibahas dalam teori graf adalah automorfisme graf. Pembahasan automorfime graf dimulai dengan menggambarkan graf yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah graf roda dan graf tangga, kemudian memberikan label pada setiap titiknya. Setelah memberikan label pada setiap titik pada graf tersebut, diberikan perlakuan berupa fungsi satu-satu dan onto pada graf tersebut. Unsur pada himpunan domain adalah titik-titik yang terdapat pada graf tersebut, begitu pula kodomainnya. Jadi fungsi satu-satu dan onto ini memetakan graf awalnya kepada dirinya sendiri. Setelah diberikan perlakuan berupa fungsi satu-satu dan onto ini, dipilah-pilah fungsi yang isomorfisme dan yang bukan isomorfisme. Fungsi yang isomorfisme terhadap dirinya sendiri ini disebut automorfisme.

Dengan kata lain, automorfisme graf ini adalah graf yang diberi perlakuan berupa fungsi dan menghasilkan graf yang titik dan sisinya sama dengan graf awalnya meskipun letak titik pada graf hasil tidak sama dengan graf aslinya. Jika digambarkan dengan kehidupan sehari-hari automorfisme sama halnya dengan perilaku manusia sehari-hari. Jika seseorang berbuat baik, maka seseorang tersebut akan mendapatkan ganjaran yang baik pula untuk dirinya sendiri. Begitu pula sebaliknya, jika seseorang berbuat buruk, maka seseorang tersebut yang akan menerima akibat dari perbuatannya.

Hal ini juga dijelaskan pada firman Allah surat Al-Isro' ayat 7 yang berbunyi:

إِنْ أَحْسَنتُمْ أَحْسَنتُمْ لِأَنفُسِكُمْ ۖ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا ۚ فَإِذَا جَآءَ وَعْدُ ٱلْآخِرَةِ لِيَسُـۥٓـُٔوا۟ وُجُوهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا۟ ٱلْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبِّرُوا۟ مَا عَلَوْا۟ تَتْبِيرًا ﴿٧﴾

7. Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai (Q.S. Al-Isro': 7).

Ayat lain yang menerangkan sama halnya tentang pembahasan ini adalah surat Al-Zalzalah ayat 7 dan 8, yang berbunyi:

فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُۥ ﴿٧﴾ وَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُۥ ﴿٨﴾

7. Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya.
8. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula (Q.S. Al-Zalzalah: 7-8).

Dari kedua ayat tersebut, jelas diterangkan tentang segala perilaku manusia yang akan mendapatkan balasan yang sesuai. Sebagai contoh dijelaskan dalam firman Allah surat Luqman ayat 12, yang berbunyi :

وَلَقَدْ ءَاتَيْنَا لُقْمَـٰنَ ٱلْحِكْمَةَ أَنِ ٱشْكُرْ لِلَّهِ ۚ وَمَن يَشْكُرْ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِۦ ۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ ٱللَّهَ غَنِىٌّ حَمِيدٌ ﴿١٢﴾

12. Dan Sesungguhnya Telah kami berikan hikmat kepada Luqman, yaitu: "Bersyukurlah kepada Allah. dan barangsiapa yang bersyukur (kepada Allah), Maka Sesungguhnya ia bersyukur untuk dirinya sendiri; dan barangsiapa yang tidak bersyukur, Maka Sesungguhnya Allah Maha Kaya lagi Maha Terpuji" (Q.S.Al-Luqman: 12).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa jika seseorang bersyukur sesungguhnya orang tersebut bersyukur untuk dirinya sendiri. Yang dimaksud dalam hal ini adalah jika seseorang mensyukuri apa yang telah diberikan Allah kepadanya, maka Allah akan memberi nikmat dan rakhmat yang lebih. Allah mencintai orang yang bersyukur. Allah menyukai orang-orang yang berterima kasih kepada-Nya. Maka manusia disarankan untuk bersyukur kepada Allah. Sesungguhnya Allah akan memberi manusia keuntungan di dunia dan di akherat. Menurut Imam Al-Ghazali, ada empat orang yang diberi keuntungan dunia dan akhirat, yaitu orang yang menggunakan lidahnya untuk berdzikir, hatinya untuk bersyukur, badannya untuk bersabar, dan memiliki istri mukminah shalihah.

2.2 Graf

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika dari Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1763. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

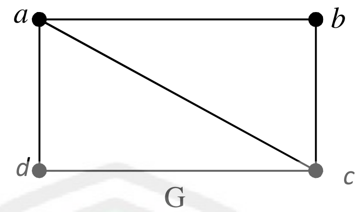
Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Definisi graf itu sendiri adalah:

Definisi

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan V(G) dari himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan p(G) dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan q(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan size dari G tersebut cukup ditulis dengan G(p,q) (Chartrand dan Lesniak,1986: 4).

Contoh :



Gambar 2.4 Contoh Graf G (4,5)

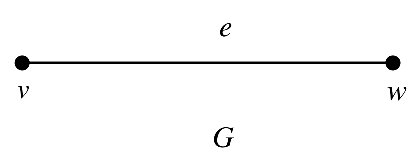
Graf *G* pada Gambar 2.1 mempunyai order 4 dan mempunyai 5 sisi, dapat dinyatakan sebagai G(4,5) dengan *V(G) = { a, b, c, d}* dan *E(G) = {(a, b), (a, d), (a, c), (b,c), (c, d)}*, atau ditulis dengan $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ untuk $e_1=(a,b)$, $e_2=(a,c)$, $e_3=(b,d)$, $e_4=(c,d)$, $e_5=(d,e)$

2.3 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Suatu graf paling sedikit memiliki sebuah titik. Suatu graf yang memiliki titik dan sisi maka dapat dinyatakan hubungan antara kedua titik dan sisi tersebut melalui definisi sebagai berikut:

Definisi

Misalkan *v* dan *w* adalah titik-titik dari suatu graf. Jika *v* dan *w* dihubungkan oleh suatu sisi (*v, w*), maka *v* dan *w* disebut terhubung langsung (*adjacent*). Lebih lanjut, *v* dan *w* dikatakan terkait langsung (*incident*) dengan (*v, w*), (*v, w)* dikatakan terkait langsung dengan *v* dan *w*, dan titik *v* dan *w* disebut titik ujung dari (*v, w)* (Wilson dan Watkins, 1990:31).



Gambar 2.5. u terhubung langsung dng v; e terkait langsung dengan v dan w di G

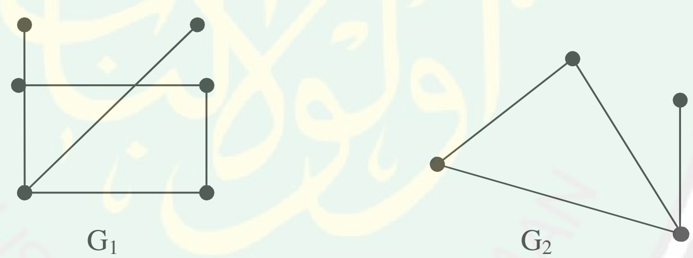
Dari Gambar 2.5 titik *v* dan *e* serta *e* dan *w* adalah *incident* dan titik *v* dan *w* adalah *adjacent*.

2.4 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

Definisi

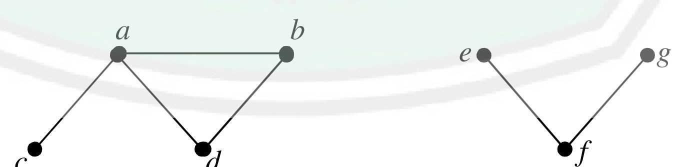
Graf dikatakan terhubung (connected) jika setiap pasangan titik u dan v di G sisi (u,v) di G. Graf dikatakan tidak terhubung (disconnected), jika ada titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan (u, v) di G. Komponen dari graf G adalah bagian maksimal dari graf G dan terhubung. graf terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan graf genap/ ganjil jika banyak titiknya genap/ ganjil (Purwanto, 1998: 8-9).

Contoh:



G_1 G_2

Gambar 2.6. Graf terhubung G_1 dan G_2



G_3

Gambar 2.7. Graf tak terhubung G_3

Graf G_3 ini terdiri dari himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan sisi $E = \{(a,b), (a, c), (a,d), (b, d), (e, f), (f, g)\}$. Graf G_3 ini merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat jalan dari a ke e, yang dihubungkan oleh sisi, sehingga terpisah menjadi dua komponen. Bagian-bagian dari susunan graf yang menyebabkan grafnya tidak terhubung maka bagian tersebut dinamakan komponen graf (Ralph, 1985: 533).

2.5 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G, ditulis dengan $\deg_G v$, adalah banyak sisi yang terkait langsung (incident) pada titik v. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg_G v$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak,1986:7).

Contoh:

G

Dari contoh graf yang diberikan pada gambar diatas, dapat dituliskan dertajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut :

$\deg_G a = 3$

$\deg_G b = 2$

$\deg_G c = 3$

$\deg_G d = 2$

karena tidak ada titik yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu E adalah

$$\sum_{v \in V(G)} deg\ v = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg_G v_i = 2q$$

Dimana q adalah banyaknya sisi pada graf G

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Corollary 1

Pada sebarang graf, banyak derajat titik ganjil adalah genap

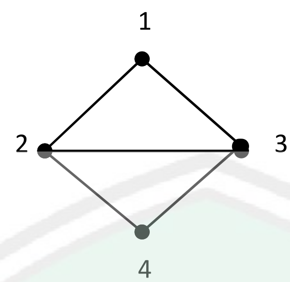
Bukti

Misalkan graf G dengan size q. Dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema diatas maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G v = \sum_{v \in W} deg_G v + \sum_{v \in U} deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in V(G)} deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7-8).

Contoh:



Gambar 2.8. Graf G(4, 5)

Menurut teorema di atas graf $G(4,5)$ maka dapat dinyatakan bahwa

$deg_G\, 1 + deg_G\, 2 + deg_G\, 3 + deg_G\, 4 \quad = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

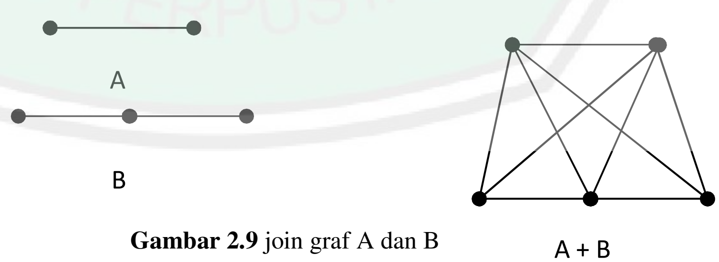
$= 2 \times$ banyak sisi $= 2 \times 5$

2.6 Operasi pada Graf

2.6.1 Penjumlahan

Definisi

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf, **join (penjumlahan)** dari G_1 dan G_2, dinotasikan $G_1 + G_2$, adalah graph yang terdiri dari $G_1 \cup G_2$, dan semua garis–garis v_iv_j, dimana $v_i \in V(G_1)$ dan $v_j \in V(G_2)$. Berikut akan ditunjukkan join graf $P_3 + K_2$ (Chartrand dan Oellerman, 1993:29).



Gambar 2.9 join graf A dan B

$A+B$ merupakan join dari graf A dan graf B.

2.6.2 Perkalian

Definisi

Pada graf G_1 dan G_2, **product (hasil kali)** $G_1 \times G_2$ adalah himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$, dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan terhubung langsung pada $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika:

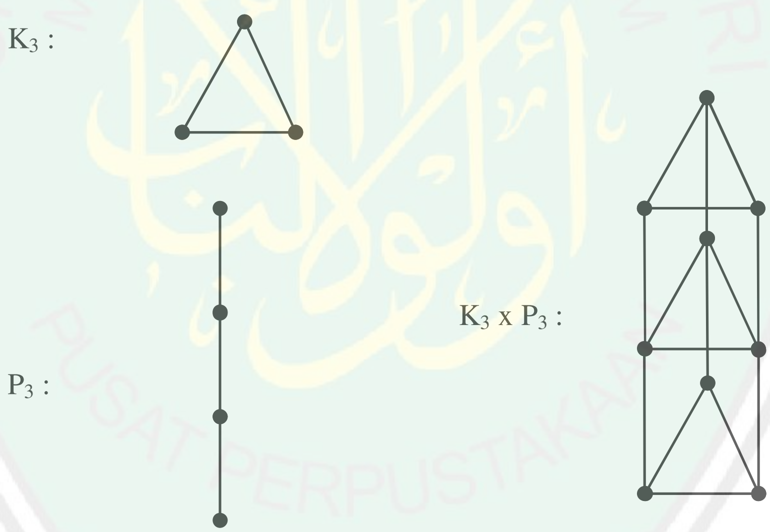
$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E(G_2)$$

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E(G_1)$$

(Chartrand dan Oellerman, 1993:29).

Dari definisi keterhubungan titik menyatakan bahwa $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

Contoh:



Gambar 2.10 Graf $K_3 \times P_3$

Graf $K_3 \times P_3$ merupakan hasil kali graf K_3 dan P_3.

2.7 Jenis-jenis Graf

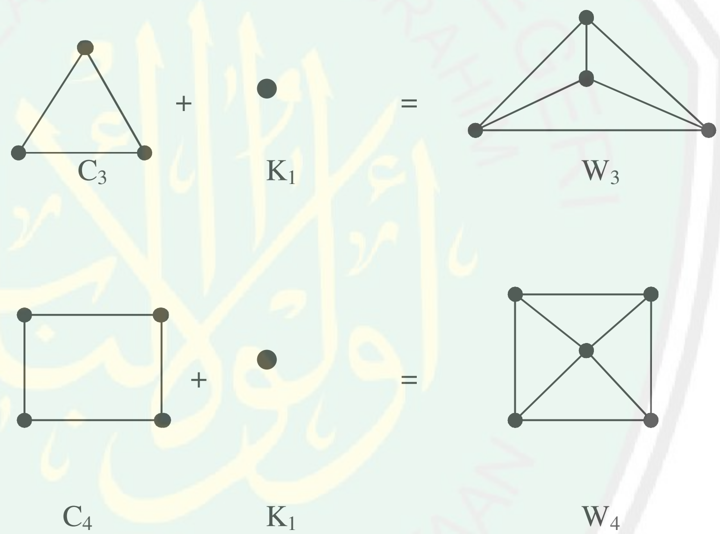
2.7.1 Graf Roda (Wheel Graph)

Definisi

Graf roda W_n adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1. Jadi,

$$W_n = C_n + K_1, n > 2$$

Contoh:



Gambar 2.11. Graf Roda-3 dan roda-4

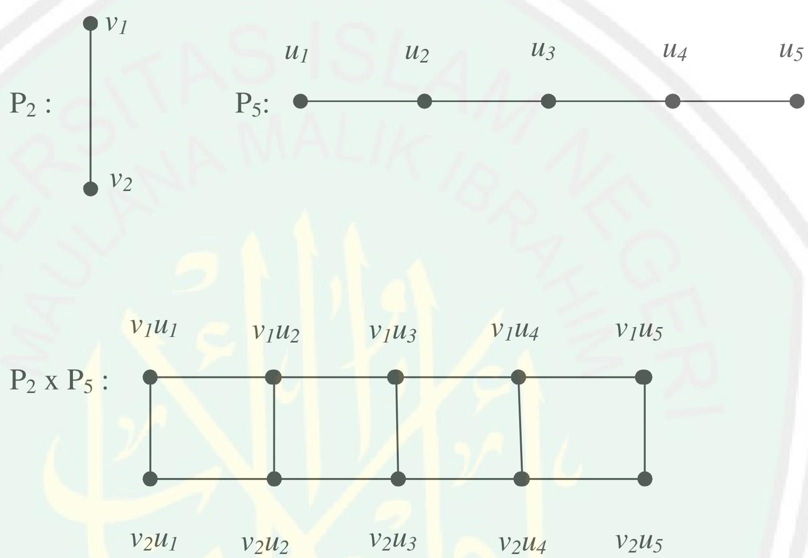
Dari gambar tersebut, maka penulis dapat menentukan beberapa ciri khusus graf roda yaitu setiap titik pada sikelnya selalu berderajat 3 dan banyaknya titik sikelnya menunjukkan derajat titik pusatnya.

2.7.2 Graf Tangga

Definisi

Graf tangga (Ladder) adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_n yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga dinotasikan dengan L_n.

Contoh:



Gambar 2.12. Graf Tangga L_5

Dari gambar tersebut, maka penulis dapat menentukan beberapa ciri graf tangga adalah empat titik sebagai titik ujung berderajat 2 dan titik yang lain (selain titik ujung) selalu berderajat 3.

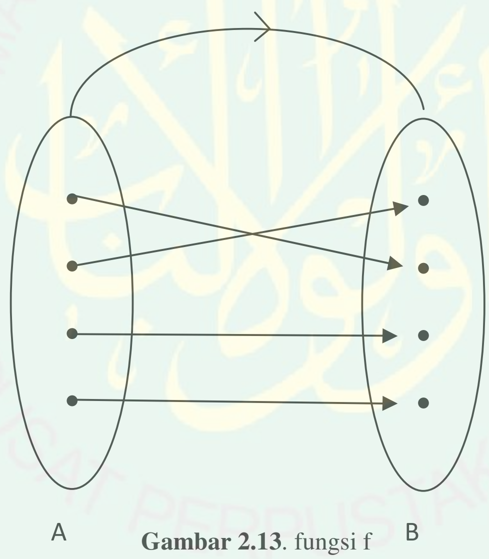
2.8 Fungsi

Definisi

Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota himpunan A tepat satu pada anggota himpunan B.

Himpunan A disebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut kodomain (daerah kawan). Setiap anggota A mempunyai pasangan atau tidak ada anggota A yang tidak punya pasangan dan pasangan masing-masing dari anggota A adalah tunggal.

Contoh:



Gambar 2.13. fungsi f

Apabila *f* menyatakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B maka dapat ditulis sebagai $f: A \rightarrow B$. Jika suatu elemen $x \in A$ dipasangkan kepada elemen $y \in B$ oleh suatu fungsi f maka dapat dinyatakan bahwa $y = f(x)$. $f(y)$ adalah elemen yang tunggal dari B yang merupakan pasangan dari $x \in A$.

Definisi Fungsi Injektif :

Misalkan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap x, $y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap x, $y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi 1-1 sering juga disebut dengan fungsi injektif. (Bartle and Sherbert, 2000:8).

Definisi Fungsi Surjektif:

Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi onto* jika R(f) = B. Jadi, f: A → B disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in$ B maka ada $x \in A$ sehingga f(x)= y. Fungsi Onto sering disebut juga fungsi surjektif atau fungsi Pada. (Bartle and Sherbert, 2000:8).

Definisi Fungsi Bijektif:

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif. (Bartle and Sherbert, 2000:8).

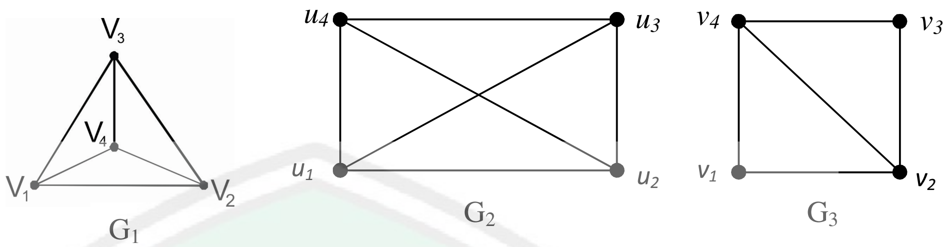
2.9 Isomorfisme Graf

Definisi

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu φ dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ sedemikian hingga $(u, v) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G_2)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 5).

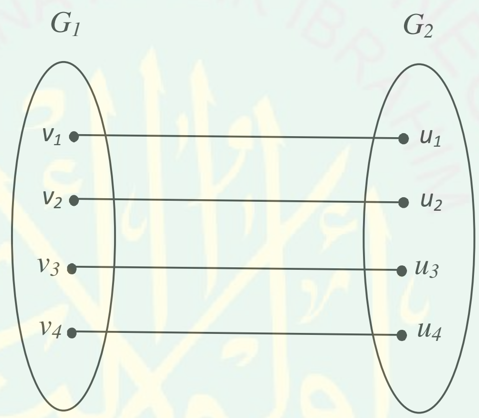
Jika G_1 isomorfis terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$.

Contoh:



Gambar 2.14 G_1 isomorfik dengan G_2 tetapi tidak isomorfik dengan G_3

Pemetaan φ: $V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ didefinisikan oleh:



, , ,

untuk setiap (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4) $E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(v_1),\varphi(v_2))$, $(\varphi(v_1),\varphi(v_3))$, $(\varphi(v_1),\varphi(v_4))$, $(\varphi(v_2),\varphi(v_3))$, $(\varphi(v_2),\varphi(v_4))$, $(\varphi(v_3),\varphi(v_4))$ $E(G_2)$.

dan

dan

dan (

dan

$(v_2, v_4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_2), \varphi(v_4)) = (u_2, u_4) \in E(G_2)$

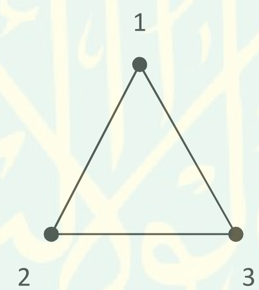
$(v_3, v_4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_3), \varphi(v_4)) = (u_3, u_4) \in E(G_2)$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $G_1 \cong G_2$.

2.10 Automorfisme Graf

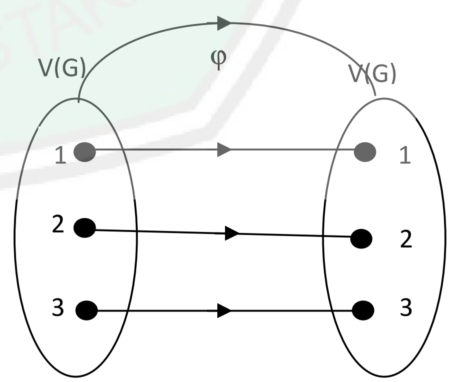
Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik V(G). Jika φ adalah suatu automorfisme dari G dan $v \in V(G)$ maka $deg_G \varphi(v) = deg_G v$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 250).

Contoh:



Gambar 2.15 Graf G

Diberikan pemetaan $\varphi: V(G) \rightarrow V(G)$, maka automorfisme yang mungkin terjadi pada graf G adalah:



1. φ(1) = 1

   φ(2) = 2

   φ(3) = 3

   Atau dapat dituliskan dengan

   φ = (1)(2)(3)

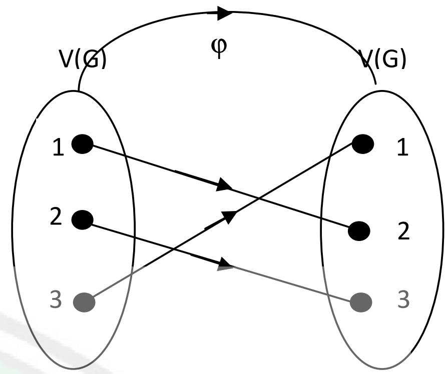
2. φ(1) = 2

   φ(2) = 3

   φ(3) = 1

   Atau dapat dituliskan dengan

   φ = (1 2 3)



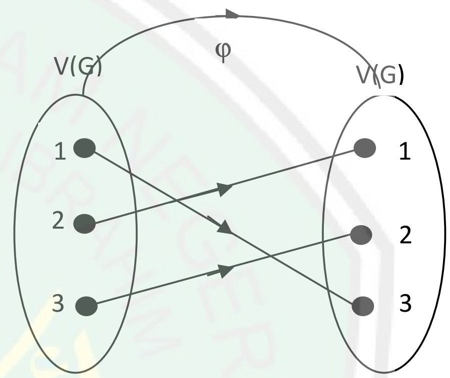
3. φ(1) = 3

   φ(2) = 1

   φ(3) = 2

   Atau dapat dituliskan dengan

   φ = (1 3 2)



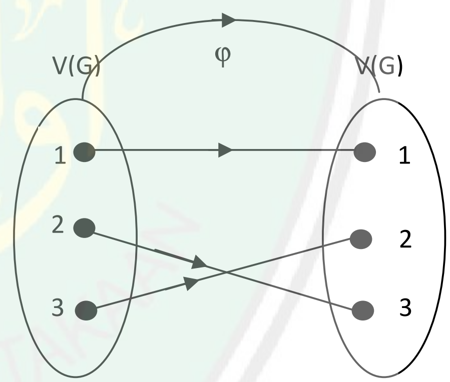
4. φ(1) = 1

   φ(2) = 3

   φ(3) = 2

   Atau dapat dituliskan dengan

   φ = (1)(2 3)



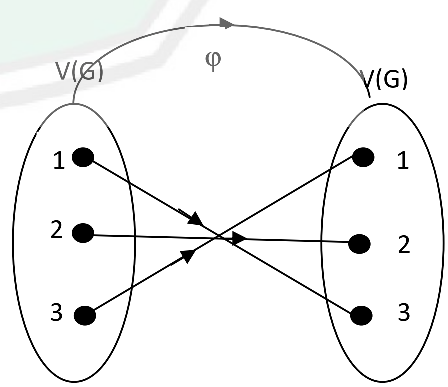
5. φ(1) = 3

   φ(2) = 2

   φ(3) = 1

   Atau dapat dituliskan dengan

   φ = (2)(1 3)



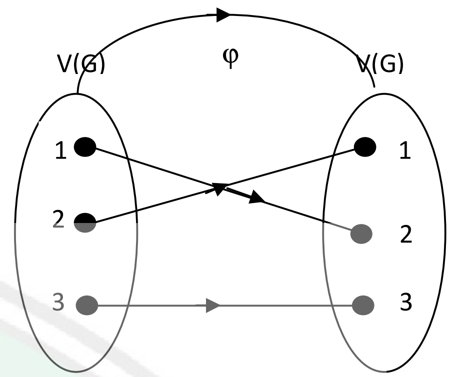
6. $\varphi(1) = 2$

   $\varphi(2) = 1$

   $\varphi(3) = 3$

   Atau dapat ditulis dengan

   $\varphi = (3)(1\ 2)$



2.11 Grup

Definisi:

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai (G, *) dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \emptyset$) dan * adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

a. (a * b) * c = a *(b * c), untuk semua $a, b, c \in G$(yaitu * assosiatif).

b. Ada suatu elemen e di G sehingga a*e = e * a = a, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).

c. Untuk setiap $a \in G$ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup (G, *) disebut abelian (grup komutatif) jika a * b = b* a untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991: 13-14).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) adalah grup abelian!

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi :

a. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu operasi + assosiatif)

b. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).

c. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$($-a$ disebut invers dari a).

d. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi,(Z, +) adalah grup abelian.

2.12 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_φ adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_φ dengan operasi komposisi "∘" atau $(S_\varphi, \circ)$ adalah grup. Perhatikan bahwa "∘" adalah operasi biner pada S_φ karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "∘" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_φ adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall\, a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\Omega \circ \Omega^{-1} = \Omega^{-1} \circ \Omega = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_φ dengan operasi ∘. Grup $(S_\varphi, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 1991: 28).

Pada kasus khusus dengan $\Omega = \{1,2,3,\dots,n)$ merupakan grup simetri pada Ω yang dinotasikan dengan S_n, yaitu *grup simetri dengan derajat n* (Dummit dan Foote, 1991: 28).

Perhatikan bahwa S_φ mempunyai order $n!$, dengan $S_\varphi = \{1,2,3,\dots,n\}$ untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma: S \to S$, ada n macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada $n-1$ macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n(n-1)\dots(2)(1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S (Beachy dan Blair, 1990: 93).

Contoh:

Misalkan $\Omega = \{1,2,3\}$, tentukan grup simetri dari S_3 tersebut!

Jawab:

Grup S_3 adalah grup simetri yang memuat $3! = 6$ elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$ maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\ (2\ \ 3) = (2\ \ 3)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)\ (2) = (1\ \ 3)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)\ \ (3) = (1\ \ 2)$$

Jadi, grup simetri $S_3 = \{1, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2), (2\ \ 3), (1\ \ 3), (1\ \ 2)\}$.

BAB III

PEMBAHASAN

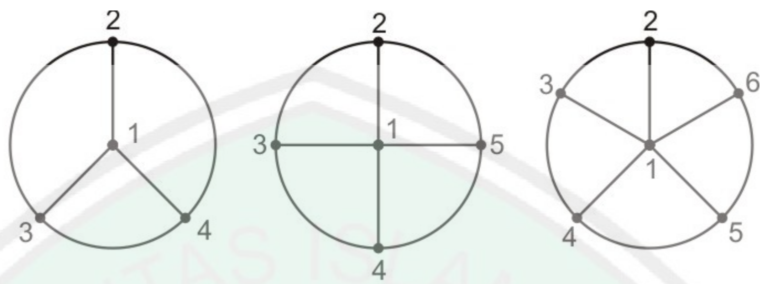
Automorfisme φ suatu graf *G* merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik *V*(G) sehingga jika (u, v) ∈ E(G) maka (φ(u), φ(v)) ∈ E(G). Dengan kata lain automorfisme pada suatu graf *G* adalah isomorfisme dari V(*G*) ke dirinya sendiri, yaitu fungsi yang memetakan ke dirinya sendiri. Pada bab ini akan dibahas mengenai automorfisme suatu graf pada graf roda dan graf tangga.

3.1 Automorfisme Graf pada Graf Roda

Pembahasan pada bab ini akan dimulai pada (1) penggambaran grafnya secara umum; kemudian (2) Pemberian label titik; (3) menentukan semua kemungkinan fungsi-fungsi yang satu-satu dan onto dari bagian 2; (4) memilah fungsi yang isomorfisme dari bagian 3; (5) menentukan konjektur; dan (6) membuat lemma dan buktinya. Beberapa graf roda diberikan seperti berikut:

Gambar 3.1 Graf Roda-3, Graf Roda-4, Graf Roda-5

Selanjutnya akan diberikan label untuk masing-masing titik pada graf-graf tersebut seperti berikut ini.

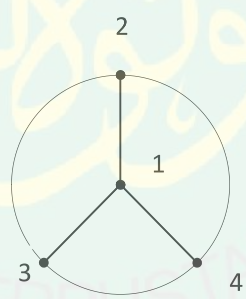


Gambar 3.2 Graf Roda-3, Graf Roda-4 dan Graf Roda-5 dengan label titik

Kemudian akan ditentukan fungsi isomorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf itu. Langkah ini dimulai dari graf roda-3 sebagai berikut ini :

3.1.1 Graf Roda-3 (W_3)

Gambar graf roda-3 (W_3) adalah sebagai berikut



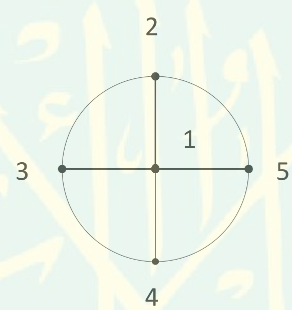
Gambar 3.3 Graf Roda-3

Himpunan titik pada graf roda-3 dimisalkan sebagai $V(W_3) = \{1, 2, 3, 4\}$. Diberikan suatu fungsi dari roda-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma:V(W_3)\rightarrow V(W_3)$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi γ yang 1-1 dan onto dari roda-3 kepada dirinya sendiri sebanyak 24 fungsi. Dan dari fungsi-fungsi tersebut semuanya adalah **automorfisme**, karena pada graf roda-3 ini semua titik-titiknya saling terhubung sehingga bayangan semua titik oleh fungsi γ juga terhubung dengan bayangan titik lainnya, dengan kata lain bahwa $(v_i,v_j) \in E(W_3)$ maka $(\gamma(v_i), \gamma(v_j)) \in E(W_3)$.

Kesimpulannya, banyaknya fungsi isomorfisme dari roda-3 ke dirinya sendiri adalah sebanyak 24 fungsi.

3.1.2 Graf Roda-4 (W_4)

Gambar graf roda-4 (W_4) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Roda-4

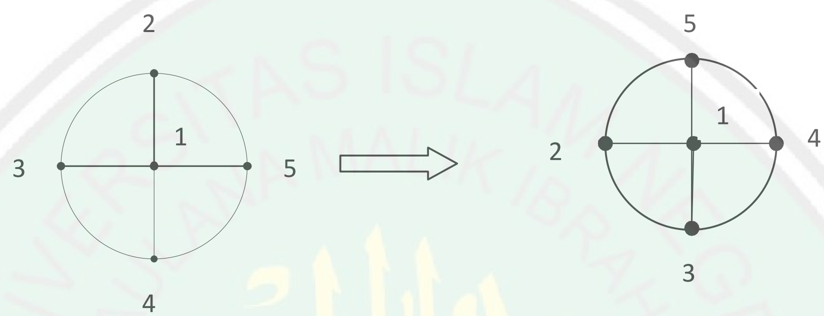
Himpunan titik pada graf roda-4 dimisalkan sebagai $V(W_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Diberikan suatu fungsi dari roda-4 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma:V(W_4)\rightarrow V(W_4)$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi γ yang 1-1 dan onto dari roda-4 kepada dirinya sendiri sebanyak 120 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan fungsi isomorfisme adalah sebanyak 32 fungsi, yaitu:

1. $\gamma_1 = (1)(2\ 3\ 4\ 5)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma(1) = 1$; $\gamma(2) = 3$; $\gamma(3) = 4$; $\gamma(4) = 5$ dan $\gamma(5) = 2$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\gamma(v_i)$	1	3	4	5	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.5 Graf Roda-4 dengan fungsi γ_1 = (1)(2 3 4 5)

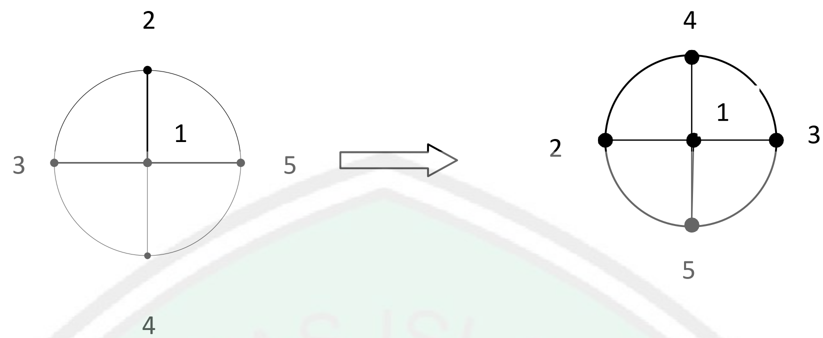
Fungsi γ_1 = (1)(2 3 4 5) adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,4) \in E(W_4)$ maka $(\gamma(1), \gamma(4)) = (1,5)$ terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\gamma(1), \gamma(4)) = (1,5) \in E(W_4)]$. Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (3,4), (4,5), $(5,2) \in E(W_4)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(W_4)$.

2. γ_2 = (1)(2 3 5 4)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma(1) = 1$; $\gamma(2) = 3$; $\gamma(3) = 5$; $\gamma(4) = 2$ dan $\gamma(5) = 4$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5
$\gamma(v_i)$	1	3	5	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



3. **Gambar 3.6** Graf Roda-4 dengan fungsi $\gamma_2 = (1)(2\ 3\ 5\ 4)$

Fungsi $\gamma_2 = (1)(2\ 3\ 5\ 4)$ adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,4) \in E(W_4)$ maka $(\gamma(1), \gamma(4)) = (1,2)$ terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\gamma(1), \gamma(4)) = (1,2) \in E(W_4)]$. Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (3,4), (4,5), (5,2) $\in E(W_4)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(W_4)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu

$\gamma_3 = (1)(2\ 4\ 3\ 5)$

$\gamma_4 = (1)(2\ 4\ 5\ 3)$

$\gamma_5 = (1)(2\ 5\ 3\ 4)$

$\gamma_6 = (1)(2\ 5\ 4\ 3)$

$\gamma_7 = (1)(2\ 3)(4\ 5)$

$\gamma_8 = (1)(2\ 4)(3\ 5)$

$\gamma_9 = (1)(2\ 5)(3\ 4)$

$\gamma_{10} = (1)(2)(3)(4\ 5)$

$\gamma_{11} = (1)(2)(4)(3\ 5)$

$\gamma_{12} = (1)(2)(5)(3\ 4)$

$\gamma_{13} = (1)(3)(4)(2\ 5)$

$\gamma_{14} = (1)(3)(5)(2\ 4)$

$\gamma_{15} = (1)(4)(5)(2\ 3)$

$\gamma_{16} = (1\ 2)\ (3)\ (4\ 5)$

$\gamma_{17} = (1\ 2)\ (4)\ (3\ 5)$

$\gamma_{18} = (1\ 2)\ (5)\ (3\ 4)$

$\gamma_{19} = (1\ 3)\ (2)\ (4\ 5)$ $\gamma_{26} = (1\ 5)\ (3)\ (2\ 4)$

$\gamma_{20} = (1\ 3)\ (4)\ (2\ 5)$ $\gamma_{27} = (1\ 5)\ (4)\ (2\ 3)$

$\gamma_{21} = (1\ 3)\ (5)\ (2\ 4)$ $\gamma_{28} = (1\ 2)(3)(4)(5)$

$\gamma_{22} = (1\ 4)\ (2)\ (3\ 5)$ $\gamma_{29} = (1\ 3)(2)(4)(5)$

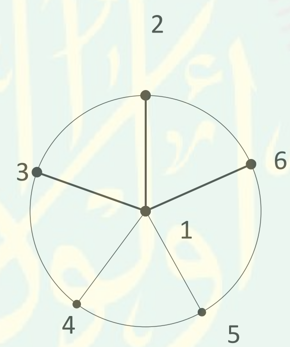
$\gamma_{23} = (1\ 4)\ (3)\ (2\ 5)$ $\gamma_{30} = (1\ 4)(2)(3)(5)$

$\gamma_{24} = (1\ 4)\ (5)\ (2\ 3)$ $\gamma_{31} = (1\ 5)(2)(3)(4)$

$\gamma_{25} = (1\ 5)\ (2)\ (3\ 4)$ $\gamma_{32} = (1)(2)(3)(4)(5)$

3.1.3 Graf Roda-5 (W_5)

Gambar graf roda-5 (W_5) adalah sebagai berikut



Gambar 3.7 Graf Roda-5

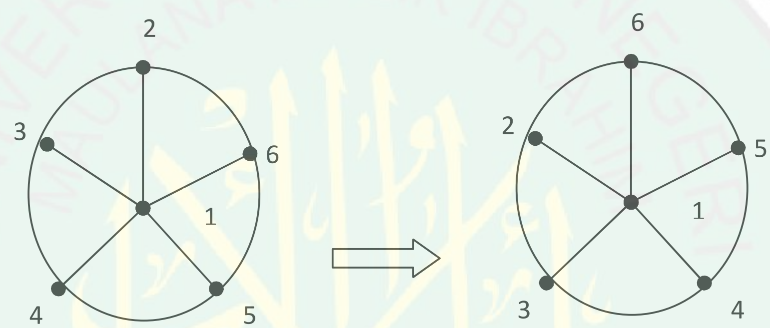
Himpunan titik pada graf roda-5 dimisalkan sebagai $V(W_5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Diberikan suatu fungsi dari roda-5 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma: V(W_5) \rightarrow V(W_5)$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi γ yang 1-1 dan onto dari roda-5 kepada dirinya sendiri sebanyak 720 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut yang merupakan fungsi isomorfisme adalah sebanyak 100 fungsi, yaitu

1. γ_1 = (1)(2 3 4 5 6)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma(1) = 1$; $\gamma(2) = 3$; $\gamma(3) = 4$; $\gamma(4) = 5$; $\gamma(5) = 6$ dan $\gamma(6) = 2$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\gamma(v_i)$	1	3	4	5	6	2

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.8 Graf Roda-5 dengan fungsi γ_1 = (1)(2 3 4 5 6)

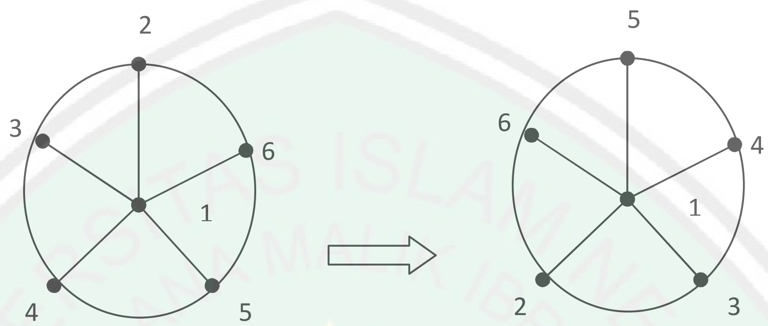
   Fungsi γ_1 = (1)(2 3 4 5 6) adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,5) \in E(W_5)$ maka $(\gamma(1), \gamma(5)) = (1,6)$ terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\gamma(1, \gamma(5)) = (1,6) \in E(W_5)]$. Begitu pula untuk (1,2),(1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), $(4,5) \in E(W_5)$ maka bayangandari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(W_5)$.

2. γ_2 = (1)(2 4 6 3 5)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma(1) = 1$; $\gamma(2) = 4$; $\gamma(3) = 5$; $\gamma(4) = 6$; $\gamma(5) = 2$ dan $\gamma(6) = 3$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\gamma(v_i)$	1	4	5	6	2	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.9 Graf Roda-5 dengan fungsi γ_2 = (1)(2 4 6 3 5)

Fungsi γ_2 = (1)(2 4 6 3 5) adalah isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,5) $\in E(W_5)$ maka ($\gamma(1)$, $\gamma(5)$) = (1,2) terdapat pada graf hasil fungsi tersebut [($\gamma(1)$, $\gamma(5)$) = (1,6) $\in$ $E(W_5)$]. Begitu pula untuk (1,2),(1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (4,5) $\in E(W_5)$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(W_5)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu

γ_3 = (1)(2 5 3 6 4)

γ_4 = (1)(2 6 5 4 3)

γ_5 = (1)(2)(3 4 6 5)

γ_6 = (1)(2)(3 5 6 4)

γ_7 = (1)(3)(2 5 4 6)

γ_8 = (1)(3)(2 6 4 5)

γ_9 = (1)(4)(2 3 6 5)

γ_{10} = (1)(4)(2 5 6 3)

γ_{11} = (1)(5)(2 4 3 6)

γ_{12} = (1)(5)(2 6 3 4)

$\gamma_{13} = (1)(6)(2\ 3\ 5\ 4)$

$\gamma_{14} = (1)(6)(2\ 4\ 5\ 3)$

$\gamma_{15} = (1)(2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\gamma_{16} = (1)(2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\gamma_{17} = (1)(2)(3\ 6)(4\ 5)$

$\gamma_{18} = (1)(3)(2\ 4)(5\ 6)$

$\gamma_{19} = (1)(3)(2\ 5)(4\ 6)$

$\gamma_{20} = (1)(3)(2\ 6)(4\ 5)$

$\gamma_{21} = (1)(4)(2\ 3)(5\ 6)$

$\gamma_{22} = (1)(4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\gamma_{23} = (1)(4)(2\ 6)(3\ 5)$

$\gamma_{24} = (1)(5)(2\ 3)(4\ 6)$

$\gamma_{25} = (1)(5)(2\ 4)(3\ 6)$

$\gamma_{26} = (1)(5)(2\ 6)(3\ 4)$

$\gamma_{27} = (1)(6)(2\ 3)(4\ 5)$

$\gamma_{28} = (1)(6)(2\ 4)(3\ 5)$

$\gamma_{29} = (1)(6)(2\ 5)(3\ 4)$

$\gamma_{30} = (1)(2)(3)(4)(5\ 6)$

$\gamma_{31} = (1)(2)(3)(5)(4\ 6)$

$\gamma_{32} = (1)(2)(3)(6)(4\ 5)$

$\gamma_{33} = (1)(2)(4)(5)(3\ 6)$

$\gamma_{34} = (1)(2)(4)(6)(3\ 5)$

$\gamma_{35} = (1)(2)(5)(6)(3\ 4)$

$\gamma_{36} = (1)(3)(4)(5)(2\ 6)$

$\gamma_{37} = (1)(3)(4)(6)(2\ 5)$

$\gamma_{38} = (1)(3)(5)(6)(2\ 4)$

$\gamma_{39} = (1)(4)(5)(6)(2\ 3)$

$\gamma_{40} = (1\ 2)(3)(4)(5)(6)$

$\gamma_{41} = (1\ 3)(2)(4)(5)(6)$

$\gamma_{42} = (1\ 4)(2)(3)(5)(6)$

$\gamma_{43} = (1\ 5)(2)(3)(4)(6)$

$\gamma_{44} = (1\ 6)(2)(3)(4)(5)$

$\gamma_{45} = (1\ 2)(3)(4)(5\ 6)$

$\gamma_{46} = (1\ 2)(3)(5)(4\ 6)$

$\gamma_{47} = (1\ 2)(3)(6)(4\ 5)$

$\gamma_{48} = (1\ 2)(4)(5)(3\ 6)$

$\gamma_{49} = (1\ 2)(4)(6)(3\ 5)$

$\gamma_{50} = (1\ 2)(5)(6)(3\ 4)$

$\gamma_{51} = (1\ 3)(2)(4)(5\ 6)$

$\gamma_{52} = (1\ 3)(2)(5)(4\ 6)$

$\gamma_{53} = (1\ 3)(2)(6)(4\ 5)$

$\gamma_{54} = (1\ 3)(4)(5)(2\ 6)$

$\gamma_{55} = (1\ 3)(4)(6)(2\ 5)$

$\gamma_{56} = (1\ 3)(5)(6)(2\ 4)$

$\gamma_{57} = (1\ 4)(2)(3)(5\ 6)$

$\gamma_{58} = (1\ 4)(2)(5)(3\ 6)$

$\gamma_{59} = (1\ 4)(2)(6)(3\ 5)$

$\gamma_{60} = (1\ 4)(3)(5)(2\ 6)$

$\gamma_{61} = (1\ 4)(3)(6)(2\ 5)$

$\gamma_{62} = (1\ 4)(5)(6)(2\ 3)$

$\gamma_{63} = (1\ 5)(2)(3)(4\ 6)$

$\gamma_{64} = (1\ 5)(2)(4)(3\ 6)$

$\gamma_{65} = (1\ 5)(2)(6)(3\ 4)$

$\gamma_{66} = (1\ 5)(3)(4)(2\ 6)$

$\gamma_{67} = (1\ 5)(3)(6)(2\ 4)$

$\gamma_{68} = (1\ 5)(4)(6)(2\ 3)$

$\gamma_{69} = (1\ 6)(2)(3)(4\ 5)$

$\gamma_{70} = (1\ 6)(2)(4)(3\ 5)$

$\gamma_{71} = (1\ 6)(2)(5)(3\ 4)$

$\gamma_{72} = (1\ 6)(3)(4)(2\ 5)$

$\gamma_{73} = (1\ 6)(3)(5)(2\ 4)$

$\gamma_{74} = (1\ 6)(4)(5)(2\ 3)$

$\gamma_{75} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\gamma_{76} = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\gamma_{77} = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$

$\gamma_{78} = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$

$\gamma_{79} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$

$\gamma_{80} = (1\ 3)(2\ 6)(4\ 5)$

$\gamma_{81} = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

$\gamma_{82} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\gamma_{83} = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$

$\gamma_{84} = (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6$

$\gamma_{85} = (1\ 5)(2\ 4)(3\ 6)$

$\gamma_{86} = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$

$\gamma_{87} = (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5)$

$\gamma_{88} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$

$\gamma_{89} = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$

$\gamma_{90} = (1\ 2)(3\ 4\ 6\ 5)$

$\gamma_{91} = (1\ 2)(3\ 5\ 6\ 4)$

$\gamma_{92} = (1\ 3)(2\ 5\ 4\ 6)$

$\gamma_{93} = (1\ 3)(2\ 6\ 4\ 5)$

$\gamma_{94} = (1\ 4)(2\ 3\ 6\ 5)$

$\gamma_{95} = (1\ 4)(2\ 5\ 6\ 3)$

$\gamma_{96} = (1\ 5)(2\ 4\ 3\ 6)$

$\gamma_{97} = (1\ 5)(2\ 6\ 3\ 4)$

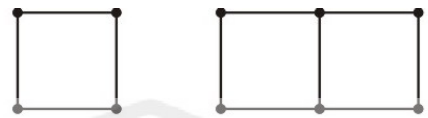
$\gamma_{98} = (1\ 6)(2\ 3\ 5\ 4)$

$\gamma_{99} = (1\ 6)(2\ 4\ 5\ 3)$

$\gamma_{100} = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

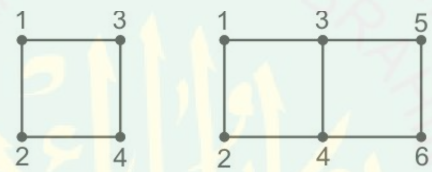
3.2 Automorfisme graf pada graf tangga

Beberapa graf tangga diberikan seperti berikut



Gambar 3.10 Graf Tangga-2 dan graf tangga-3

Selanjutnya akan diberikan label titik untuk masing-masing titik pada graf-graf tersebut seperti berikut ini.



Gambar 3.11 Graf Tangga-2 dan graf tangga-3 dengan label titik

Kemudian akan ditentukan fungsi isomorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf itu. Langkah ini dimulai dari graf tangga-2 (L_2) sebagai berikut ini :

3.2.1 Graf Tangga-2 (L_2)

Gambar graf tangga-2 (L_2) adalah sebagai berikut

Gambar 3.12 Graf Tangga-2

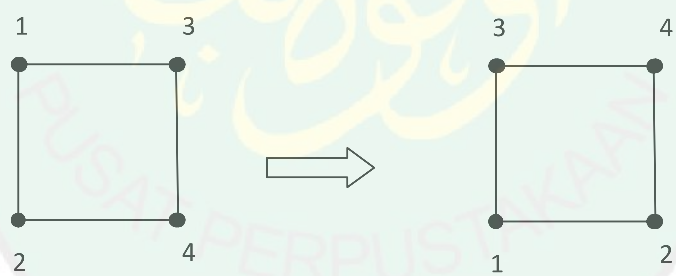
Himpunan titik pada graf tangga-2 (L_2) dimisalkan sebagai $V(L_2) = \{1, 2, 3, 4\}$. Diberikan suatu fungsi dari tangga-2 (L_2) pada dirinya sendiri yaitu $\omega: V(L_2) \rightarrow V(L_2)$. Banyaknya semua kemungkinan fungsi ω yang 1-1 dan onto dari tangga (L_2) kepada dirinya sendiri sebanyak 24 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut, yang merupakan fungsi Isomorfisme adalah sebanyak 16 fungsi, yaitu

1. $\omega_1 = (1\ 2\ 4\ 3)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\omega(1) = 2$; $\omega(2) = 4$; $\omega(3) = 1$; dan $\omega(4)=3$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\omega(v_i)$	2	4	1	3

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.13 Graf Tangga-2 dengan fungsi $\omega_1 = (1\ 2\ 4\ 3)$

   Fungsi $\omega_1 = (1\ 2\ 4\ 3)$ adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa $(1,2) \in E(L_2)$ maka $(\omega(1), \omega(2)) = (2,4)$ terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\omega(1), \omega(2)) = (2,4) \in E(L_2)]$.

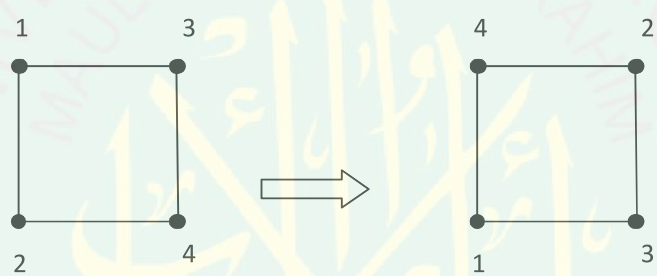
Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (2,4), (3,4) $\in E(L_2)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(L_2)$.

2. $\omega_2 = (1\ 2\ 3\ 4)$

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\omega(1) = 2$; $\omega(2) = 3$; $\omega(3) = 4$; dan $\omega(4) = 1$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4
$\omega(v_i)$	2	3	4	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.14 Graf Tangga-2 dengan fungsi ω_2 =(1 2 3 4)

Fungsi ω_2 = (1 2 3 4) adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(L_2)$ maka ($\omega(1)$, $\omega(2)$) = (2,3) terdapat pada graf hasil fungsi tersebut [($\omega(1)$, $\omega(2)$) = (2,3) $\in$ $E(L_2)$]. Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (2,4), (3,4) $\in E(L_2)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(L_2)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu

ω_3 = (1)(2)(3)(4)

ω_4 =(1 3 2 4)

ω_5 = (1 3 4 2)

ω_6 = (1 4 2 3)

ω_7 = (1 4 3 2)

ω_8 = (1)(2)(3 4)

ω_9 = (1)(3)(2 4)

ω_{10} = (1)(4)(2 3)

ω_{11} = (2)(3)(1 4)

ω_{12} = (2)(4)(1 3)

ω_{13} = (3)(4)(1 2)

ω_{14} = (1 2)(3 4)

ω_{15} = (1 3)(2 4)

ω_{16} = (1 4)(2 3)

3.2.2 Graf Tangga-3 (L_3)

Gambar graf tangga-3 (L_3) adalah sebagai berikut:

Gambar 3.15 Graf tangga-3

Himpunan titik pada graf tangga-3 (L_3) dimisalkan sebagai $V(L_3)= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Diberikan suatu fungsi dari tangga-3 (L_3) pada dirinya sendiri yaitu $\omega:V(L_3)\rightarrow V(L_3)$.

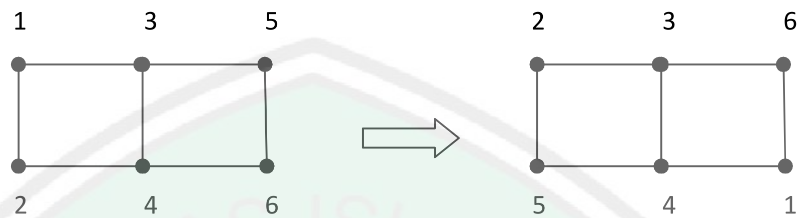
Banyaknya semua kemungkinan fungsi ω yang 1-1 dan onto dari graf tangga-3 (L_3) kepada dirinya sendiri sebanyak 720 fungsi. Akan tetapi, dari fungsi-fungsi tersebut yang merupakan fungsi Isomorfisme adalah sebanyak 80 fungsi, yaitu

1. ω_1 = (3)(4)(1 6 5 2)

   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\omega(1) = 6$; $\omega(2) = 1$; $\omega(3) = 3$; $\omega(4) = 4$; $\omega(5) = 2$ dan $\omega(6) = 5$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\omega(v_i)$	6	1	3	4	2	5

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.16 Graf tangga-3 dengan fungsi ω_1 = (3)(4)(1 6 5 2)

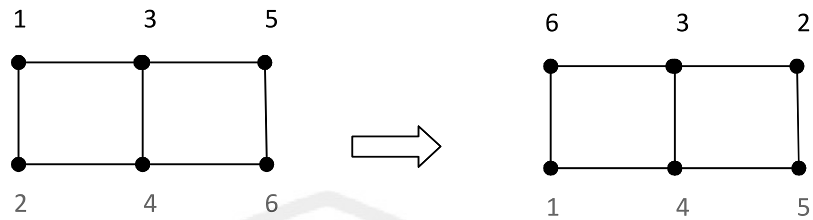
Fungsi ω_1 = (3)(4)(1 6 5 2) adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(L_3)$ maka $(\omega(1),\omega(2))$ = (6,1) terdapat pada graf hasil fungsi tersebut $[(\omega(1), \omega(2)) = (6,1) \in E(L_3)]$. Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,6), (5,6) $\in E(L_3)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(L_3)$.

2. ω_2 = (3)(4)(1 2 5 6)

Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\omega(1) = 2$; $\omega(2) = 5$; $\omega(3) = 3$; $\omega(4) = 4$; $\omega(5) = 6$ dan $\omega(6) = 1$ atau bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

v_i	1	2	3	4	5	6
$\omega(v_i)$	2	5	3	4	6	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai



Gambar 3.17 Graf tangga-3 dengan fungsi ω_2 = (3)(4)(1 2 5 6)

Fungsi ω_2 = (3)(4)(1 2 5 6) adalah Isomorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa (1,2) $\in E(L_3)$ maka (ω(1), ω(2)) = (2,5) terdapat pada graf hasil fungsi tersebut [(ω(1), ω(2)) = (2,5) $\in$ $E(L_3)$]. Begitu pula untuk sisi (1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,6), (5,6) $\in E(L_3)$ maka banyangan dari sisi-sisi tersebut juga ada di $E(L_3)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya di bawah ini, yaitu

ω_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)

ω_4 = (1)(2)(3)(4)(5 6)

ω_5 = (1)(2)(3)(5)(4 6)

ω_6 = (1)(2)(3)(6)(4 5)

ω_7 = (1)(2)(4)(5)(3 6)

ω_8 = (1)(2)(4)(6)(3 5)

ω_9 = (1)(2)(5)(6)(3 4)

ω_{10} = (1)(3)(4)(5)(2 6)

ω_{11} = (1)(3)(4)(6)(2 5)

ω_{12} = (1)(3)(5)(6)(2 4)

ω_{13} = (1)(4)(5)(6)(2 3)

ω_{14} = (2)(3)(4)(5)(1 6)

ω_{15} = (2)(3)(4)(6)(1 5)

ω_{16} = (2)(3)(5)(6)(1 4)

ω_{17} = (2)(4)(5)(6)(1 3)

ω_{18} = (3)(4)(5)(6)(1 2)

ω_{19} = (1)(2)(3 4)(5 6)

ω_{20} = (1)(2)(3 5)(4 6)

ω_{21} = (1)(2)(3 6)(4 5)

ω_{22} = (1)(3)(2 4)(5 6)

ω_{23} = (1)(3)(2 5)(4 6)

ω_{24} = (1)(3)(2 6)(4 5)

$\omega_{25} = (1)(4)(2\ 3)(5\ 6)$

$\omega_{26} = (1)(4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\omega_{27} = (1)(4)(2\ 6)(3\ 5)$

$\omega_{28} = (1)(5)(2\ 3)(4\ 6)$

$\omega_{29} = (1)(5)(2\ 4)(3\ 6)$

$\omega_{30} = (1)(5)(2\ 6)(3\ 4)$

$\omega_{31} = (1)(6)(2\ 3)(4\ 5)$

$\omega_{32} = (1)(6)(2\ 4)(3\ 5)$

$\omega_{33} = (1)(6)(2\ 5)(3\ 4)$

$\omega_{34} = (2)(3)(1\ 4)(5\ 6)$

$\omega_{35} = (2)(3)(1\ 5)(4\ 6)$

$\omega_{36} = (2)(3)(1\ 6)(4\ 5)$

$\omega_{37} = (2)(4)(1\ 3)(5\ 6)$

$\omega_{38} = (2)(4)(1\ 5)(3\ 6)$

$\omega_{39} = (2)(4)(1\ 6)(3\ 5)$

$\omega_{40} = (2)(5)(1\ 3)(4\ 6)$

$\omega_{41} = (2)(5)(1\ 4)(3\ 6)$

$\omega_{42} = (2)(5)(1\ 6)(3\ 4)$

$\omega_{43} = (2)(6)(1\ 3)(4\ 5)$

$\omega_{44} = (2)(6)(1\ 4)(3\ 5)$

$\omega_{45} = (2)(6)(1\ 5)(3\ 4)$

$\omega_{46} = (3)(4)(1\ 2)(5\ 6)$

$\omega_{47} = (3)(4)(1\ 5)(2\ 6)$

$\omega_{48} = (3)(4)(1\ 6)(2\ 5)$

$\omega_{49} = (3)(5)(1\ 2)(4\ 6)$

$\omega_{50} = (3)(5)(1\ 4)(2\ 6)$

$\omega_{51} = (3)(5)(1\ 6)(2\ 4)$

$\omega_{52} = (3)(6)(1\ 2)(4\ 5)$

$\omega_{53} = (3)(6)(1\ 4)(2\ 5)$

$\omega_{54} = (3)(6)(1\ 5)(2\ 4)$

$\omega_{55} = (4)(5)(1\ 2)(3\ 6)$

$\omega_{56} = (4)(5)(1\ 3)(2\ 6)$

$\omega_{57} = (4)(5)(1\ 6)(2\ 3)$

$\omega_{58} = (4)(6)(1\ 2)(3\ 5)$

$\omega_{59} = (4)(6)(1\ 3)(2\ 5)$

$\omega_{60} = (4)(6)(1\ 5)(2\ 3)$

$\omega_{61} = (5)(6)(1\ 2)(3\ 4)$

$\omega_{62} = (5)(6)(1\ 3)(2\ 4)$

$\omega_{63} = (5)(6)(1\ 4)(2\ 3)$

$\omega_{64} = (3\ 4)(1\ 2\ 5\ 6)$

$\omega_{65} = (3\ 4)(1\ 6\ 5\ 2)$

$\omega_{66} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\omega_{67} = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$

$\omega_{68} = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$

$\omega_{69} = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$

$\omega_{70} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$

$\omega_{71} = (1\ 3)(2\ 6)(4\ 5)$

$\omega_{72} = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

ω_{73} = (1 4)(2 5)(3 6)

ω_{74} = (1 4)(2 6)(3 5)

ω_{75} = (1 5)(2 3)(4 6)

ω_{76} = (1 5)(2 4)(3 6)

ω_{77} = (1 5)(2 6)(3 4)

ω_{78} = (1 6)(2 3)(4 5)

ω_{79} = (1 6)(2 4)(3 5)

ω_{80} = (1 6)(2 5)(3 4)

3.3 Pola Titik Fungsi Automorfisme pada Graf

Selanjutnya akan ditentukan banyaknya fungsi satu-satu, onto, dan isomorfisme dari masing-masing graf ke dirinya sendiri berdasarkan bentuk-bentuk permutasi yang mengacu pada pemetaan titiknya yang memenuhi fungsi tersebut, dengan pola sebagai berikut:

3.3.1 Graf Roda

Graf Roda-3	Graf Roda-4	Graf Roda-5
(1)(2)(3)(4)=1	(1)(2)(3)(4)(5) = 1	(1)(2)(3)(4)(5)(6) = 1
(1)(. . .) = 2	(1)(. . . .) = 6	(1)(. . . . .) = 4
(1)(.)(. .) = 3	(1)(.)(.)(. .) = 6	(1)(.)(. . . .) = 10
	(1)(. .)(. .) = 3	(1)(.)(.)(.)(. .) = 10
(1 .)(.)(.) = 3		(1)(.)(. .)(. .) = 15
(1 .)(. .) = 3	(1 .) (.)(. .) = 12	(1 .)(.)(.)(.)(.) =5
	(1 .)(.)(.)(.) =4	(1 .)(.)(.)(. .) =30
		(1 .)(. .)(. .) =15
(1 . . .)(.) =6		(1 .)(. . . .) = 10
(1 . . .) = 6		

Pada graf roda-3 (W_3), banyak fungsi satu-satu, onto dan isomorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 24 fungsi.

Pada graf roda-4 (W_4), banyak fungsi satu-satu, onto dan isomorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 32 fungsi.

Pada graf roda-5 (W_5), banyak fungsi satu-satu, onto dan isomorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 100 fungsi.

Pada graf roda-n, banyaknya fungsi automorfisme dengan pola fungsi berbentuk (1)(…..) diperoleh sebagai berikut :

Roda-3	Roda-4	Roda-5	Roda-6
(1)(2 3 4) (1)(2 4 3)	(1)(2 3 4 5) (1)(2 3 5 4) (1)(2 4 5 3) (1)(2 4 3 5) (1)(2 5 3 4) (1)(2 5 4 3)	(1)(2 3 4 5 6) (1)(2 4 6 3 5) (1)(2 5 3 6 4) (1)(2 6 5 4 3)	(1)(2 3 4 5 6 7) (1)(2 3 6 7 4 5) (1)(2 5 4 7 6 3) (1)(2 5 6 3 4 7) (1)(2 7 4 3 6 5) (1)(2 7 6 5 4 3)
2 fungsi	6 fungsi	4 fungsi	6 fungsi

Roda-7	Roda-8	Roda-9
(1)(2 3 4 5 6 7 8) (1)(2 6 3 7 4 8 5) (1)(2 7 5 3 8 6 4) (1)(2 4 6 8 3 5 7) (1)(2 5 8 4 7 3 6) (1)(2 8 7 6 5 4 3)	(1)(2 3 4 5 6 7 8 9) (1)(2 5 8 3 6 9 4 7) (1)(2 7 4 9 6 3 8 5) (1)(2 9 8 7 6 5 4 3) (1)(2 3 8 9 6 7 4 5) (1)(2 7 8 5 6 3 4 9) (1)(2 4 6 8 3 5 7 9) (1)(2 8 7 4 3 9 6 5)	(1)(2 3 4 5 6 7 8 9 1 0) (1)(2 7 3 8 4 9 5 10 6) (1)(2 9 7 5 3 10 8 6 4) (1)(2 4 6 8 10 3 5 7 9) (1)(2 6 10 5 9 4 8 3 7) (1)(2 10 9 8 7 6 5 4 3)
6 fungsi	8 fungsi	6 fungsi

Roda-10	Roda-11
(1)(2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)	(1)(2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12)
(1)(2 9 6 3 10 7 4 11 8 5)	(1)(2 8 3 9 4 10 5 11 6 12 7)
(1)(2 5 8 11 4 7 10 3 6 9)	(1)(2 6 10 3 7 11 4 8 12 5 9)
(1)(2 11 10 9 8 7 6 5 4 3)	(1)(2 5 8 11 3 6 9 12 4 7 10)
(1)(2 3 8 9 4 5 10 11 6 7)	(1)(2 11 9 7 5 3 12 10 8 6 4)
(1)(2 7 8 3 4 9 10 5 6 11)	(1)(2 4 6 8 10 12 3 5 7 9 11)
(1)(2 3 6 7 10 11 4 5 8 9)	(1)(2 10 7 4 12 9 6 3 11 8 5)
(1)(2 5 6 9 10 3 4 7 8 11)	(1)(2 9 5 12 8 4 11 7 3 10 6)
(1)(2 11 4 3 6 5 8 7 10 9)	(1)(2 7 12 6 11 5 10 4 9 3 8)
(1)(2 5 4 7 6 9 8 11 10 3)	(1)(2 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3)
(1)(2 11 6 5 10 9 4 3 8 7)	
(1)(2 7 6 11 10 5 4 9 8 3)	
(1)(2 9 4 11 6 3 8 5 10 7)	
(1)(2 7 4 9 6 11 8 3 10 5)	
(1)(2 9 8 5 4 11 10 7 6 3)	
(1)(2 11 8 7 4 3 10 9 6 5)	
16 fungsi	10 fungsi

Dari pola data dan penjelasan graf roda di atas diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Banyaknya fungsi automorfisme pada graf roda-n (W_n), yang berpola (1)(. . . .) jika n prima adalah n-1 fungsi.

Bukti

Diberikan graf roda-n (W_n) dengan banyak n+1 titik. Misal titik-titiknya adalah (v_1, v_2, v_3, … , v_{n+1}). Telah ditetapkan titik v_1 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Sedangkan titik yang lain siklis. Akan ada kemungkinan n! fungsi satu-satu dan onto. Jika n bilangan prima, maka

Misal $\varphi = (1)\underbrace{(\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,)}_{n}$

$\varphi = (v_1)(v_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,)$

Jika n bilangan prima, maka pembagi bilangan tersebut adalah satu dan dirinya sendiri sehingga v_i dapat dipetakan sebanyak n-1. Bilangan n-1 ini menunjukkan langkah dalam permutasi siklis yang dapat digambarkan sebagai berikut

2 langkah

$(v_1)(v_2\ v_3\ v_4 \ldots v_{n+1})$

1 langkah

k langkah

$(v_1)(v_2 \ldots v_3 \ldots v_4 \ldots v_n)$

k langkah

Fungsi yang automorfisme dari v_2 menuju v_3 akan melangkah sebanyak k langkah, selanjutnya dari v_3 menuju v_4 juga melangkah sebanyak k langkah sampai pada v_n. Semua langkah ini akan teratur sampai pada v_n.

Fungsi ini dijamin isomorfisme karena $\forall\, v_i \in G$, maka v_i terhubung langsung dengan v_{i-1} dan v_{i+1}. Selanjutnya jika

$\varphi(v_i) \quad = (v_{i+k})$

$\varphi(v_{i-1}) \quad = (v_{i+k-1})$

$\varphi(v_{i+1}) \quad = (v_{i+k+1})$

Karena (v_{i+k}) terhubung langsung dengan (v_{i+k-1}) dan (v_{i+k+1}), sesuai dengan definisi automorfisme, jika pada graf awalnya terdapat sisi yang menghubungkan, maka pada graf hasil juga terdapat sisi yang menghubungkan. Maka fungsi ini adalah automorfisme.

3.3.2 Graf Tangga

Graf Tangga (L_2)	Graf Tangga (L_3)
(1)(2)(3)(4) = 1	(1)(2)(3)(4)(5)(6) = 1
(1)(.)(. .) = 3	(1)(.)(.)(.)(. .) = 10
	(1)(.)(. .)(. .) = 15
(1 .)(. .) = 3	(1 .)(. .)(. .) = 15
(1 .)(.)(.) = 3	(1 .)(.)(.)(. .) = 30
	(1 .)(.)(.)(.)(.) = 5
	(1 . . .)(.)(.) = 2
	(1 . . .)(. .) = 2
(1 . . .) = 6	

Pada graf tangga-2 (L_2), banyak fungsi satu-satu, onto dan isomorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 16 fungsi.

Pada graf tangga-3 (L_3), banyak fungsi satu-satu, onto dan isomorfisme dari graf tersebut ke dirinya sendiri adalah sebanyak 80 fungsi.

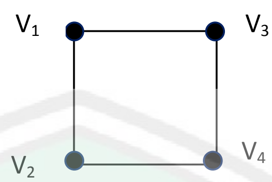
Dari data di atas, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 2

Fungsi automorfisme pada graf tangga dengan pola (1 . . .) hanya ada pada graf L_2.

Bukti

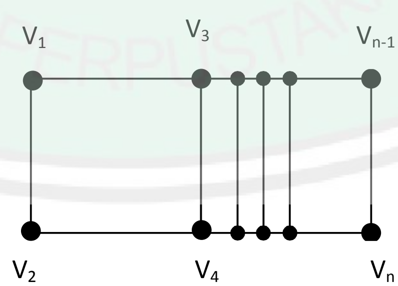
Diberikan graf tangga-2 (L_2) seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.18 Graf Tangga-2 (L_2)

Pada graf tangga L_2, titik ujung (v_1) menghubungkan dua titik yang terhubung langsung dengan titik pangkal (v_4), tetapi v_1 tidak terhubung dengan v_4 (v_1 terhubung langsung dengan v_2 dan v_3 dan v_2, v_3 juga terhubung langsung dengan v_4). Sehingga jika diberi perlakuan berupa fungsi satu-satu dan onto yang berpola (1 . . .) yaitu bila v_1 dipetakan ke v_4, karena v_2 dan v_3 terhubung langsung ke v_1 dan juga ke v_4 maka pemetaan tersebut pasti merupakan fungsi automorfisme.

Sedangkan pada graf tangga L_3 sampai L_n, titik ujung (v_1) hanya terhubung dengan dua titik yang kedua titik tersebut tidak terhubung langsung dengan titik pangkal (v_n) (seperti pada gambar)



Gambar 3.19 Graf Tangga-n (L_n)

v_1 hanya terhubung dengan v_2 dan v_3, tetapi v_2 dan v_3 tidak terhubung dengan v_n.

Titik v_n hanya terhubung dengan v_{n-2} dan v_{n-1}, tetapi v_{n-2} dan v_{n-1} tidak terhubung dengan v_1. Sehingga jika v_1 dipetakan ke v_n maka fungsinya pasti bukan automorfisme, karena pada graf awalnya dapat terlihat bahwa v_{n-2} terhubung langsung pada v_n akan tetapi pada graf petanya, v_{n-1} tidak terhubung pada v_1 ($f(v_{n-1}) = v_n$).

3.4 Fungsi Automorfisme Membentuk Grup

Selanjutnya pada bagian terakhir ini akan ditunjukkan bahwa tidak semua himpunan fungsi automorfisme akan membentuk grup. Pada graf roda-3 (W_3), semua fungsi satu-satu dan onto adalah automorfisme, maka jelas ini membentuk grup. Tetapi pada graf roda-4 (W_4) sampai roda-n (W_n) dan pada graf tangga-2 (L_2) sampai tangga-n (L_n) tidak semua fungsi yang satu-satu dan onto membentuk automorfisme. Dan banyaknya anggota fungsi yang automorfisme tidak membagi banyaknya semua kemungkinan satu-satu dan onto, maka tidak membentuk grup karena tidak tertutup.

Himpunan fungsi-fungsi automorfisme pada graf roda-3 yang dinyatakan dalam bentuk permutasi, dikenai operasi komposisi maka membentuk grup. Hal ini akan dinyatakan dalam bentuk tabel di bawah ini

o	I	(1) (234)	(1) (243)	(2) (134)	(2) (143)	(3) (124)	(3) (142)	(4) (123)	(4) (132)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)	(2)(3) (14)	(2)(4) (13)	(3)(4) (12)	(12) (34)	(13) (24)	(14) (23)	(1234)	(1243)	(1324)	(1342)	(1423)	(1432)
I	I	(1) (234)	(1) (243)	(2) (134)	(2) (143)	(3) (124)	(3) (142)	(4) (123)	(4) (132)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)	(2)(3) (14)	(2)(4) (13)	(3)(4) (12)	(12) (34)	(1 3) (2 4)	(14) (23)	(1234)	(1243)	(1324)	(1342)	(1423)	(1432)
(1)(2 3 4)	(1)(2 3 4)	(1) (2 4 3)	I	(14) (23)	(4) (123)	(2) (134)	(12) (34)	(13) (24)	(3) (142)	(1)(4) (23)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)	(1234)	(1423)	(1342)	(4) (132)	(2) (143)	(3) (124)	(1324)	(2)(4) (13)	(2)(3) (14)	(1432)	(1243)	(3)(4) (12)
(1)(2 4 3)	(1)(2 4 3)	I	(1) (234)	(3) (124)	(13) (24)	(14) (23)	(4) (132)	(2) (143)	(12) (34)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)	(1)(2) (34)	(1324)	(1243)	(1432)	(3) (142)	(4) (123)	(2) (134)	(2)(3) (14)	(1423)	(1234)	(3)(4) (12)	(2)(4) (13)	(1342)
(2)(1 3 4)	(2)(1 3 4)	(13) (24)	(4) (132)	(2) (143)	I	(12) (34)	(1) (234)	(3) (124)	(14) (23)	(2)(4) (13)	(1342)	(1324)	(12) (34)	(2)(3) (14)	(1234)	(4) (123)	(3) (142)	(1) (243)	(1243)	(3)(4) (12)	(1432)	(1423)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)
(2)(1 4 3)	(2)(1 4 3)	(3) (142)	(14) (23)	I	(2) (134)	(4) (123)	(13) (24)	(12) (34)	(1) (243)	(2)(3) (14)	(1423)	(1432)	(2)(4) (13)	(1)(2) (34)	(1243)	(3) (124)	(1) (234)	(4) (132)	(3)(4) (12)	(1234)	(1)(4) (23)	(1)(3) (24)	(1342)	(1324)
(3)(1 2 4)	(3)(1 2 4)	(4) (123)	(12) (34)	(13) (24)	(1) (243)	(3) (142)	I	(14) (23)	(2) (134)	(1243)	(3)(4) (12)	(1234)	(1)(3) (24)	(1324)	(2)(3) (14)	(2) (143)	(4) (132)	(1) (234)	(1423)	(1432)	(1342)	(2)(4) (13)	(1)(4) (23)	(1)(2) (34)
(3)(1 4 2)	(3)(1 4 2)	(14) (23)	(2) (143)	(4) (132)	(12) (34)	I	(3) (124)	(1) (234)	(13) (24)	(1432)	(2)(3) (14)	(1423)	(3)(4) (12)	(1342)	(1)(3) (24)	(1) (243)	(2) (134)	(4) (123)	(1)(4) (23)	(1)(2) (34)	(2)(4) (13)	(1324)	(1234)	(1243)
(4)(1 2 3)	(4)(1 2 3)	(12) (34)	(3) (124)	(1) (234)	(14) (23)	(13) (24)	(2) (143)	(4) (123)	I	(1234)	(1243)	(3)(4) (12)	(1423)	(1)(4) (23)	(2)(4) (13)	(2) (134)	(1) (243)	(3) (142)	(1342)	(1324)	(1)(3) (24)	(1)(2) (34)	(1432)	(2)(3) (14)
(4)(1 3 2)	(4)(1 3 2)	(2) (134)	(13) (24)	(12) (34)	(3) (142)	(1) (243)	(14) (23)	I	(4) (123)	(1342)	(1324)	(2)(4) (13)	(1432)	(3)(4) (12)	(1)(4) (23)	(1) (234)	(3) (124)	(2) (143)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)	(1243)	(1234)	(2)(3) (14)	(1423)
(1)(2)(3 4)	(1)(2)(3 4)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)	(2)(3) (14)	(2)(4) (13)	(1234)	(1342)	(1243)	(1432)	I	(1) (234)	(1) (243)	(2) (134)	(2) (143)	(12) (34)	(3)(4) (12)	(1423)	(1324)	(3) (124)	(4) (123)	(14) (23)	(3) (142)	(13) (24)	(4) (132)
(1)(3)(2 4)	(1)(3)(2 4)	(1)(4) (23)	(1)(2) (34)	(1324)	(1243)	(2)(3) (14)	(3)(4) (12)	(1423)	(1342)	(1) (243)	I	(1) (234)	(3) (124)	(13) (24)	(3) (142)	(1432)	(2)(4) (13)	(1234)	(14) (23)	(2) (143)	(2) (134)	(4) (132)	(4) (123)	(12) (34)
(1)(4)(2 3)	(1)(4)(2 3)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)	(1234)	(1423)	(1324)	(1432)	(2)(4) (13)	(3)(4) (12)	(1) (234)	(1) (243)	I	(14) (23)	(4) (123)	(4) (132)	(1342)	(1243)	(2)(3) (14)	(2) (134)	(13) (24)	(3) (124)	(12) (34)	(2) (143)	(3) (142)
(2)(3)(1 4)	(2)(3)(1 4)	(1423)	(1432)	(2)(4) (13)	(1)(2) (34)	(3)(4) (12)	(1)(3) (24)	(1234)	(1324)	(2) (143)	(3) (142)	(14) (23)	I	(2) (134)	(3) (124)	(1243)	(1342)	(1)(4) (23)	(4) (123)	(12) (34)	(2)(4) (13)	(13) (24)	(1) (234)	(1) (243)

(2)(4)(1 3)	(2)(4)(1 3)	(1342)	(1324)	(1)(2) (34)	(2)(3) (14)	(1243)	(1423)	(3)(4) (12)	(1)(4) (23)	(2) (134)	(13) (24)	(4) (132)	(2) (143)	I	(4) (123)	(1234)	(1)(3) (24)	(1432)	(12) (34)	(3) (124)	(1) (243)	(1) (234)	(3) (142)	(14) (23)
(3)(4)(1 2)	(3)(4)(1 2)	(1234)	(1243)	(1342)	(1432)	(1)(3) (24)	(2)(3) (14)	(1)(4) (23)	(2)(4) (13)	(12) (34)	(3) (124)	(4) (123)	(3) (142)	(4) (132)	I	(1)(2) (34)	(1324)	(1423)	(1) (234)	(1) (243)	(13) (24)	(2) (134)	(14) (23)	(2) (143)
(1 2)(3 4)	(12) (34)	(3) (124)	(4) (123)	(3) (142)	(4) (132)	(1) (234)	(2) (134)	(1) (243)	(2) (143)	(3)(4) (12)	(1234)	(1243)	(1342)	(1432)	(1)(2) (34)	I	(14) (23)	(13) (24)	(1)(3) (24)	(1)(4) (23)	(1423)	(2)(3) (14)	(1324)	(2)(4) (13)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(4) (132)	(2) (134)	(1) (243)	(3) (124)	(2) (143)	(4) (123)	(3) (142)	(1) (234)	(1324)	(2)(4) (13)	(1342)	(1243)	(1)(3) (24)	(1423)	(14) (23)	I	(12) (34)	(1432)	(2)(3) (14)	(1)(2) (34)	(1)(4) (23)	(3)(4) (12)	(1234)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(2) (143)	(3) (142)	(4) (123)	(1) (234)	(4) (132)	(1) (243)	(2) (134)	(3) (124)	(1423)	(1432)	(2)(3) (14)	(1)(4) (23)	(1234)	(1324)	(13) (24)	(12) (34)	I	(2)(4) (13)	(1342)	(3)(4) (12)	(1243)	(1)(2) (34)	(1)(3) (24)
(1 2 3 4)	(1 2 3 4)	(1243)	(3)(4) (12)	(1423)	(1)(4) (23)	(1342)	(1)(2) (34)	(1324)	(2)(3) (14)	(4) (123)	(12) (34)	(3) (124)	(1) (234)	(14) (23)	(2) (134)	(2)(4) (13)	(1432)	(1)(3) (24)	(13) (24)	(4) (132)	(3) (142)	(2) (143)	(1) (243)	I
(1 2 4 3)	(1 2 4 3)	(3)(4) (12)	(1234)	(1)(3) (24)	(1324)	(1423)	(2)(4) (13)	(1432)	(1)(2) (34)	(3) (124)	(4) (123)	(12) (34)	(1324)	(1) (243)	(2) (143)	(2)(3) (14)	(1)(4) (23)	(1342)	(3) (142)	(14) (23)	(1) (234)	I	(2)(4) (13)	(2) (134)
(1 3 2 4)	(1 3 2 4)	(2)(4) (13)	(1342)	(1243)	(1)(3) (24)	(1432)	(1)(4) (23)	(2)(3) (14)	(1234)	(13) (24)	(4) (132)	(2) (134)	(1) (243)	(3) (124)	(14) (23)	(1423)	(3)(4) (12)	(1)(2) (34)	(2) (143)	(3) (142)	(12) (34)	(4) (123)	I	(1) (234)
(1 3 4 2)	(1 3 4 2)	(1324)	(2)(4) (13)	(1432)	(3)(4) (12)	(1)(2) (34)	(1234)	(1)(3) (24)	(1423)	(4) (132)	(2) (134)	(13) (24)	(12) (34)	(3) (142)	(1) (234)	(1)(4) (23)	(1243)	(1243)	(1) (243)	I	(2) (143)	(14) (23)	(3) (124)	(4) (123)
(1 4 2 3)	(1 4 2 3)	(1432)	(2)(3) (14)	(1)(4) (23)	(1234)	(2)(4) (13)	(1243)	(1342)	(1)(3) (24)	(14) (23)	(2) (143)	(3) (142)	(4) (123)	(1) (234)	(13) (24)	(1324)	(1)(2) (34)	(3)(4) (12)	(4) (132)	(2) (134)	I	(1) (243)	(12) (34)	(3) (124)
(1 4 3 2)	(1 4 3 2)	(2)(3) (14)	(1423)	(3)(4) (12)	(1342)	(1)(4) (23)	(1324)	(1)(2) (34)	(1243)	(3) (142)	(14) (23)	(2) (143)	(4) (132)	(12) (34)	(1) (243)	(1)(3) (24)	(1234)	(2)(4) (13)	I	(1) (234)	(4) (123)	(3) (124)	(2) (134)	(13) (24)

Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa himpunan fungsi automorfisme pada graf roda-3 (W_3) membentuk grup, karena memenuhi sifat-sifat

i. Tertutup

ii. Assosiaif

iii. Mempunyai elemen identitas

iv. Ada invers.

Tetapi pada graf roda-4 (W_4) sampai roda-n (W_n) serta graf tangga-2 (L_2) sampai tangga-n (L_n) himpunan fungsi automorfisme tidak membentuk grup, dapat dilihat pada tabel dibawah ini:

o	I	(1 2 3 4)	(1 2 4 3)	(1 3 2 4)	(1 3 4 2)	(1 4 2 3)	(1 4 3 2)	(3 4)	(2 4)	(2 3)	(1 4)	(1 3)	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
I	I	(1 2 3 4)	(1 2 4 3)	(1 3 2 4)	(1 3 4 2)	(1 4 2 3)	(1 4 3 2)	(3 4)	(2 4)	(2 3)	(1 4)	(1 3)	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2 3 4)	(1 2 3 4)	(1 3)(2 4)	**(1 3 2)**	**(1 4 2)**	**(1 4 3)**	(1 3 2 4)	I	**(1 2 3)**	(1 2)(3 4)	**(1 2 4)**	**(2 3 4)**	(1 4)(2 3)	**(1 3 4)**	(1 3)	(1 4 3 2)	(2 4)
(1 2 4 3)	(1 2 4 3)	**(1 4 2)**	(1 4)(2 3)	**(2 3 4)**	I	**(1 3 2)**	**(1 3 4)**	**(1 2 4)**	**(1 2 3)**	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	**(2 4 3)**	**(1 4 3)**	(1 4)	(2 3)	(1 3 4 2)
(1 3 2 4)	(1 3 2 4)	**(1 4 3)**	**(1 4 2)**	(1 2)(3 4)	**(1 2 3)**	I	**(2 3 4)**	(1 3)(2 4)	**(1 3 2)**	**(1 3 4)**	**(2 4 3)**	**(1 2 4)**	(1 4)(2 3)	(1 4 2 3)	(1 2)	(3 4)
(1 3 4 2)	(1 3 4 2)	**(2 4 3)**	I	**(1 4 3)**	(1 4)(2 3)	**(1 2 4)**	**(1 2 3)**	**(1 3 2)**	**(1 3 4)**	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	**(1 4 2)**	**(2 3 4)**	(2 3)	(1 4)	(1 2 4 3)
(1 4 2 3)	(1 4 2 3)	**(1 3 2)**	**(1 3 4)**	I	**(2 4 3)**	(1 2)(3 4)	**(1 2 4)**	(1 4)(2 3)	**(1 4 3)**	**(1 4 2)**	**(1 2 3)**	**(2 3 4)**	(1 3)(2 4)	(1 3 2 4)	(3 4)	(1 2)
(1 4 3 2)	(1 4 3 2)	I	**(2 3 4)**	(1 2 3)	**(1 2 4)**	**(1 3 4)**	(1 3)(2 4)	**(1 4 2)**	(1 4)(2 3)	**(1 4 3)**	**(1 3 2)**	(1 2)(3 4)	**(2 4 3)**	(2 4)	(1 2 3 4)	(1 3)
(3 4)	(3 4)	**(1 2 4)**	**(1 2 3)**	(1 4)(2 3)	**(1 4 2)**	(1 3)(2 4)	**(1 3 2)**	I	**(2 3 4)**	**(2 4 3)**	**(1 3 4)**	**(1 4 3)**	(1 2)(3 4)	(1 2)	(1 4 2 3)	(1 3 2 4)
(2 4)	(2 4)	(1 4)(2 3)	**(1 4 3)**	**(1 3 4)**	**(1 3 2)**	**(1 2 3)**	(1 2)(3 4)	**(2 4 3)**	I	**(2 3 4)**	**(1 2 4)**	(1 3)(2 4)	**(1 4 2)**	(1 4 3 2)	(1 3)	(1 2 3 4)
(2 3)	(2 3)	**(1 3 4)**	(1 3)(2 4)	**(1 2 4)**	(1 2)(3 4)	**(1 4 3)**	**(1 4 2)**	**(2 3 4)**	**(2 4 3)**	I	(1 4)(2 3)	**(1 2 3)**	**(1 3 2)**	(1 3 4 2)	(1 2 4 3)	(1 4)
(1 4)	(1 4)	**(1 2 3)**	(1 2)(3 4)	**(1 3 2)**	(1 3)(2 4)	**(2 3 4)**	**(2 4 3)**	**(1 4 3)**	**(1 4 2)**	(1 4)(2 3)	I	**(1 3 4)**	**(1 2 4)**	(1 2 4 3)	(1 3 4 2)	(2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2)(3 4)	**(1 2 4)**	**(2 4 3)**	**(2 3 4)**	**(1 4 2)**	(1 4)(2 3)	**(1 3 4)**	(1 3)(2 4)	**(1 3 2)**	**(1 4 3)**	I	**(1 2 3)**	(1 2 3 4)	(2 4)	(1 4 3 2)
(1 2)	(1 2)	**(2 3 4)**	**(2 4 3)**	(1 3)(2 4)	**(1 3 4)**	(1 4)(2 3)	**(1 4 3)**	(1 2)(3 4)	**(1 2 4)**	**(1 2 3)**	**(1 4 2)**	**(1 3 2)**	I	(3 4)	(1 3 2 4)	(1 4 2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(2 4)	(2 3)	(1 4 2 3)	(1 4)	(1 3 2 4)	(1 3)	(1 2)	(1 2 3 4)	(1 2 4 3)	(1 3 4 2)	(1 4 3 2)	(3 4)	I	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 3 2)	(1 4)	(3 4)	(2 3)	(1 2)	(1 2 3 4)	(1 3 2 4)	(1 3)	(1 3 4 2)	(1 2 4 3)	(2 4)	(1 4 2 3)	(1 4)(2 3)	I	(1 2)(3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 3 4 2)	(1 2)	(1 2 4 3)	(3 4)	(2 4)	(1 4 2 3)	(1 4 3 2)	(1 4)	(2 3)	(1 2 3 4)	(1 3 2 4)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	I

Dari tabel di atas terlihat bahwa himpunan fungsi yang automorfisme tidak tertutup ditandai dengan tulisan yang ditebal *(bold)*. Karena pada graf tangga tidak tertutup, maka tidak membentuk grup. Akan membentuk grup jika dipilih beberapa anggota saja dioperasikan dengan operasi komposisi. Misalnya diambil fungsi sebagai berikut:

1. ω= (1)(2)(3)(4)
2. ω= (1 2)(3 4)
3. ω= (1 3)(2 4)
4. ω= (1 4)(2 3)

fungsi-fungsi ini akan membentuk grup seperti yang ditunjukkan pada tabel dibawah ini

o	I	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
I	I	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	I	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	I	(1 2)(3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	I

Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa himpunan fungsi automorfisme yang dipilih pada graf tangga-2 (L_n) membentuk grup, karena memenuhi sifat-sifat:

i. Tertutup
ii. Assosiaif
iii. Mempunyai elemen identitas
iv. Ada invers

BAB IV

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan:

1. Fungsi automorfisme pada graf roda-n (W_n) yang berpola (1)(. . . .) untuk n bilangan prima ada sebanyak n-1 fungsi
2. Fungsi automorfisme pada graf tangga-n (L_n) yang berpola (1 . . .) hanya ada pada graf tangga L_2.
3. Himpunan fungsi automorfisme pada graf roda-3 (W_3) membentuk grup dengan operasi komposisi.

5.2 Saran

Automorfisme graf roda dan graf tangga diaplikasikan untuk mencari banyaknya fungsi yang automorfisme pada graf roda dan graf tangga. Sehingga, pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian automorfisme pada bentuk pola jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G. and Sherbert, Donal R. 2000. *Introduction to Real Analysis (Third Edition).* USA: John Wiley and Sons.

Chartrand, Gary and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: a Division of Wadsworth.Inc.

Chartrand, Gary and Oellermann, Ortrud R. 1993. Applied and Algoritmic Graph Theory. Canada: Mc Graw-Hill Inc

Dummit and Foote. 1991. *Abstract Algebra*. Prentice-Hall International. Mexico.

Ralph, Grimaldi. 1985. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. RHI

Beachy, Jhon A. and Blair, William D. 1990. *Abstract Algebra with a Concrete Introduction.* New Jersey: Prentice Hall Inc.

Purwanto. 1998. *Teori Graf*. Malang: IKIP MALANG.

Sudarsono dan Susmayati. 1992. *Kakbah Pemersatu Umat Islam*. Jakarta: Asdi Mahasatya

Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and Introductory Approach.* Singapore: Open University course.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Any Tsalasatul Fitriyah**
NIM : **07610031**
Fakultas/ Jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga**
Pembimbing I : **Wahyu Henky Irawan, M.Pd**
Pembimbing II : **Dr. H.Ahmad Barizi, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	20 Agustus 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	03 September 2010	Konsultasi BAB I		2.
3	17 September 2010	Revisi BAB I	3.	
4	24 September 2010	ACC BAB I dan Konsultasi BAB II		4.
5	01 Oktober 2010	Revisi pertama BAB II	5.	
6	08 Oktober 2010	Revisi kedua BAB II		6.
7	15 Oktober 2010	ACC BAB II dan Konsultasi BAB III	7.	
8	22 Oktober 2010	Revisi pertama BAB III		8.
9	29 Oktober 2010	Revisi kedua BAB III	9.	
10	05 November 2010	Revisi ketiga BAB III		10.
11	12 Desember 2010	ACC BAB III dan Konsultasi BAB IV	11.	
12	14 Desember 2010	Konsultasi Keagamaan		12.
13	11 Januari 2011	ACC Keagamaan	13.	
14	12 Januari 2011	ACC BAB IV		14.
15	13 Januari 2011	ACC Keseluruhan	15.	

Malang, 13 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001